

Logika nápisov a tabuliek (Úlohy o autoreferenčných sústavách výrokov a viet pre žiakov základných a stredných škôl)

Úlohy a témy záujmovej matematiky týkajúce sa matematickej logiky majú veľkú príťažlivosť. Páčia sa deťom a následne prinášajú pocit „z dobre vykonanej matematiky“ aj ich prednášateľom a prezentátorom. Priťahujú aj autorov, za všetkých (kvalitných!) spomeňme Raymonda Smullyana a jeho skvelé knižky, dostupné aj v českom preklade. Táto oblasť matematického vzdelávania je tiež veľmi vhodná a otvorená pre konštruktivistické prístupy, pri ktorých nie je matematika prezentovaná deťom v „hotovej forme“, ale pri riešení vhodných problémov si ju vymýšľajú a objavujú sami. Na ilustráciu len jeden príklad: nad paradoxom Kréťana je ochotný zamyslieť sa aspoň na chvíľu aj zarytý odporca matematiky. Samozrejme, matematicky „zapálené“ deti sú podobným úlohám ochotné venovať čas a energiu oveľa viac.

Smutnejším dôvodom, pre ktorý je vhodné venovať sa podobným úlohám, je spôsob, ako sa oblasti logiky venuje školská, podľa osnov hlavne stredoškolská matematika. Tá veľmi často sklzáva len k týždňu trvajúcemu formálnemu vyplňaniu tabuliek pravdivostných hodnôt (a nepresnému matematickému vyjadrovaniu v ostatných tematických celkoch). Takto pripravení študenti následne nemajú šancu využívať napríklad dôkazy sporom alebo sa zorientovať, ktorý smer implikácie chceli a ktorý sa im podarilo zdôvodniť. Témy záujmovej matematiky tu môžu významne pomôcť či už prípravou pôdy na neskoršie formálne zavedenie logických pojmov alebo (v horšom prípade) aspoň naprávaním už vykonaných prešľapov.

Pre upresnenie pripomeniem, že v nasledujúcom texte si všimame len užšiu časť logiky reprezentovanej určitou skupinou úloh vhodných pre žiakov II. stupňa ZŠ a študentov SŠ. Ide o typické úlohy vyžadujúce pravdivostnú analýzu určitej sústavy tvrdení, väčšinou konfrontovanej a vzťahujúcej sa na súvisiacu reálnu situáciu. Ešte presnejšie myslíme na tú logiku (kognitívnu štruktúru logických pojmov, postupov a predstáv), ktorá ako dôsledok riešenia podobných úloh vzniká a kultivuje sa v myslení detí. Ide o logiku v tzv. druhom Popperovskom svete (duševný svet žiaka, svet jeho zážitkov). Myšlienkové postupy vyvolané riešením takýchto úloh sa pokúsime charakterizovať nasledovnými črtami. Zhodneme sa asi na tom, že pokiaľ žiak spomenuté postupy pozná a správne používa, má na svoj vek takmer optimálne „logické“ vzdelanie.

- V úlohách sa uvažuje o tvrdeniach a ich pravdivostných hodnotách (... a kráľ ešte povedal, že najviac jedno z jeho tvrdení je pravdivé...).
- Okrem jednoduchých výrokov sa v zadaniach používajú aj zložitejšie tvrdenia s logickými spojkami a kvantifikátormi.
- Pri riešení úloh sa zvažuje konzistentnosť a vzájomný pravdivostný súvis viacerých tvrdení (...ale ak by bolo toto tvrdenie pravdivé, potom by muselo byť aj tamto tvrdenie pravdivé...).
- Zvažuje sa konzistentnosť tvrdení s nejakou reálnou situáciou. (...ak by bola princezná zatvorená vo vedľajšej miestnosti, potom by toto tvrdenie nebolo pravdivé...).
- Vytvárajú sa a ďalej používajú negácie tvrdení (...ale ak klamal, potom musí platiť...).
- Vytvárajú sa dlhé súvislé reťazce odvodení, s veľmi presnou argumentáciou (...ak by toto tvrdenie bolo pravdivé, potom by tu musel byť portrét, ale potom platí aj druhé tvrdenie, ale podľa neho...).
- Objavujú sa logické spory a zmysel majú aj „negatívne“ výsledky (...ak by toto tvrdenie bolo pravdivé, muselo by byť zároveň aj nepravdivé, ale to je nezmysel...).

Dostatok podnetov a materiálu na pestovanie tohto spôsobu uvažovania nám poskytujú známe série úloh o klamároch a poctivcoch, krabičkách krásnej Porcie, ostrove Otázok a odpovedí, princeznách a tigroch atď., ktoré nájdeme v knihách už spomenutého R. Smullyana. Okrem zaradovania rôzne „prebalených“ úloh tohto typu do korešpondenčných seminárov a iných súťaží v riešení úloh, majú veľký úspech aj prednášky komponované ako kaskáda takýchto úloh. Osvedčili sa najmä pre žiakov druhého stupňa ZŠ. (Teraz aj v ďalšom pod týmto termínom rozumieme samozrejme aj žiakov prvého stupňa OG.) Okrem obsahu za dôležitú a možno rozhodujúcu považujeme aj formu prednášok. Postupne gradované úlohy sú komponované do vhodného motivačného a dej posúvajúceho rozprávkového príbehu. Samotné riešenie úloh prebieha v 3- alebo 4-členných skupinkách žiakov (každá zodpovedá napr. jednému princovi hľadajúcemu princeznú), pričom úlohou skupiny je vymyslieť, navzájom si vydiskutovať a nakoniec si dohodnúť jedno spoločné riešenie. To potom prezentujú pred celým plénom. Prednášajúci, okrem posúvania deja a zadávania nových úloh, má za úlohu usmerňovať diskusiu a zabezpečiť, aby bol prezentovaný každý spôsob riešenia úloh a aby pred plénom aspoň raz vystúpilo každé z detí. V prospech uvedenej formy hovorí pohľad do histórie. Podľa všetkého sa logika narodila a kultivovala v prvom rade ako nástroj pre vedenie diskusií na agorách gréckych polis a až potom vznikla jej prvá formalizácia v Aristotelových prácach. Zdá sa preto (vzhľadom na známy súvis ontogenézy a fylogenézy), že vyššie popísaný typ prednášok je pre žiakov ZŠ z hľadiska formy aj obsahu takmer optimálny.

Samozrejme, bolo lákavé dobré skúsenosti s témou preniesť z II. stupňa ZŠ aj na stredoškolákov. Pre ich potreby je ešte stále únosná uvedená „tímovo-prezentačná“ forma prednášky, bolo ale potrebné zvýšiť obtiažnosť a atraktivnosť úloh. Nasledujúca sada je pokusom o vyriešenie tejto požiadavky. Každá úloha spočíva v analýze pravdivosti viet uvedených na jednej tabuľke, pričom všetky tvrdenia sa týkajú práve pravdivosti viet na tejto tabuľke. Ide teda o rôzne varianty skupiny autoreferenčných tvrdení. Kompletná sada úloh bola otestovaná na 1,5 hodinovej prednáške pre žiakov stredných škôl. Hodinový výber úloh sa skúšal so žiakmi 8. a 9. ročníka ZŠ. Pre žiakov SŠ bol počet tvrdení na jednotlivých tabuľkách zväčša určený premennou, pre žiakov ZŠ bol tento počet konkrétny (zväčša desať viet). Stredoškoláci tiež rýchlo prešli na rôzne skrátené formy zápisu zadania a riešenia, smerujúce až k formalizácii podobnej štandardnej logike. V tomto texte uvedieme úlohy vo forme pre žiakov ZŠ. Väčšina úloh je uvedená vo viacerých variantoch (A,B,C), ktoré stupňujú alebo upevňujú postupy objavené a použité pri ich riešení. Celá sada je prirodzene gradovaná od ľahších ku ťažším úlohám. V úlohách je rozšíreným spôsobom používaný pojem kvantifikátor, keď ním označujeme aj výrazy „práve 3“, „aspoň 5“ a podobne. Inšpirovala nás k tomu skutočnosť, že výraz „existuje práve jeden“ sa v literatúre niekedy považuje za špeciálny typ kvantifikátora.

Ku každej úlohe uvádzame zadanie a stručný komentár k jej riešeniu. Samotné riešenie ale nechávame na čitateľa (a až po ňom sa väčšinou objasní zmysel komentára). Dôvody pre tento postup sú dva. Po prvé, čaro a kúzlo úloh nie je možné odhaliť inak, ako vlastnou aktivitou. Druhý dôvod je „bezpečnostný“: tému by podľa môjho názoru deťom nemal prezentovať nikto, kto ju predtým neokúsil na vlastnej koži. Aktívna účasť čitateľa je preto nevyhnutnou súčasťou nasledujúceho textu, jeho pasívne čítanie je takmer zbytočné. Samozrejme, pri realizácii prednášky by všetky uvedené a naznačené riešenia mali objaviť deti. Hlavnou úlohou prednášateľa je poskytnúť priestor na ich prezentáciu. V prípade ťažších úloh (a väčších ťažkostí s nimi) môže okrem motivovania a povzbudzovania sprostredkovať aj výmenu medziriešení a jednotlivých nápadov.

Takže nech sa páči, začíname:

1A: **Na tejto tabuľke je presne jedno pravdivé tvrdenie.**
Na tejto tabuľke sú presne dve pravdivé tvrdenia.
Na tejto tabuľke sú presne tri pravdivé tvrdenia.

...

Na tejto tabuľke je presne desať pravdivých tvrdení.

(Pre SŠ posledná veta znela „Na tejto tabuľke je presne n pravdivých tvrdení“.)

Komentár: Úloha umožňuje osvojiť si prácu s kvantifikátorom „práve“. (Tu je nahradený slovíčkom „presne“, ktoré je deťom bližšie a nie je zaťažené prípadnými zlými spomienkami z vyučovania.) Kľúčom k riešeniu je uvedenie si, že jednotlivé tvrdenia sa navzájom vylučujú. Viacero detí objavilo len jedno riešenie (tieto tvrdenia sú v spore, môže preto platiť len jedno z nich...) Na možnosť iných riešení ich môžeme upozorniť, alebo túto možnosť objavíme pri úlohe 1B.

1B: **Na tejto tabuľke sú presne tri pravdivé tvrdenia.**

...

Na tejto tabuľke je presne desať pravdivých tvrdení.

Komentár: Zrušíme niekoľko z prvých viet úlohy 1A, čím prideme o jedno z jej riešení. Pokiaľ sa deti v 1A príliš sústredili na formálnu zviazanosť viet, teraz je viac dôležité aj to, čo tvrdia. Posledné tri vety sa stávajú nepravdivé aj z iných ako „vylučujúcich“ dôvodov, čo deti väčšinou nepostrehnú (a ani nepotrebnú k riešeniu).

1C: **Na tejto tabuľke je presne nula pravdivých tvrdení.**
Na tejto tabuľke je presne jedno pravdivé tvrdenie.
Na tejto tabuľke sú presne dve pravdivé tvrdenia.
Na tejto tabuľke sú presne tri pravdivé tvrdenia.

...

Na tejto tabuľke je presne desať pravdivých tvrdení.

Komentár: Pribudla zaujímavá prvá veta, je poučné znegovať si ju. Zmenila sa úloha poslednej vety, ktorá už nehovorí o celej tabuľke. Stratíme druhé z riešení úlohy 1A.

2A: **Na tejto tabuľke je presne jedno nepravdivé tvrdenie.**
Na tejto tabuľke sú presne dve nepravdivé tvrdenia.
Na tejto tabuľke sú presne tri nepravdivé tvrdenia.

...

Na tejto tabuľke je presne desať nepravdivých tvrdení.

Komentár: Na prvý pohľad ide o obdobu úlohy 1A, deti zväčša aj použijú postup z nej (vety sa vylučujú...). Záver riešenia je ale mierne odlišný. Pocitovo je práca s „nepravdivými“ tvrdeniami iná ako s „pravdivými“.

2B: **Na tejto tabuľke sú presne štyri nepravdivé tvrdenia.**
...
Na tejto tabuľke je presne desať nepravdivých tvrdení.

2C: **Na tejto tabuľke je presne nula nepravdivých tvrdení.**
Na tejto tabuľke je presne jedno nepravdivé tvrdenie.
Na tejto tabuľke sú presne dve nepravdivé tvrdenia.
Na tejto tabuľke sú presne tri nepravdivé tvrdenia.
...
Na tejto tabuľke je presne desať nepravdivých tvrdení.

Komentár: Prínosom úloh je ďalšie jemné rozlíšenie podobností a rozdielov v porovnaní s úlohami 1. Na každej prednáške sa našiel jeden alebo dvaja žiaci, ktorí objavili izomorfizmus úloh 1 a 2. Ich riešenie (a pochvalu) sme prebrali individuálne, u ostatných zostal súvis úloh viac v intuitívnej polohe.

3A: **Na tejto tabuľke je práve jedno pravdivé tvrdenie.**
3B: **Na tejto tabuľke je práve jedno nepravdivé tvrdenie.**
(Ide o dve úlohy, teda aj dve tabuľky.)

Komentár: Pred týmito úlohami sa s deťmi zhodneme, že tabuľky z úloh 1 a 2 nám už teda nerobia žiadne problémy. V tom sa utvrdíme pri úlohe 3A a sklameme pri úlohe 3B. V nej si ujasníme „neriešiteľnosť“ tabuľky a po debate ju odložíme medzi nepodarky. Niektoré tabuľky jednoducho nie je povolené vyrábať, vzniká kategória „zakázaných“ tabuliek..

4A: **Na tejto tabuľke je aspoň jedno pravdivé tvrdenie.**
Na tejto tabuľke sú aspoň dve pravdivé tvrdenia.
Na tejto tabuľke sú aspoň tri pravdivé tvrdenia.
...
Na tejto tabuľke je aspoň desať pravdivých tvrdení.

Komentár: Zmena kvantifikátoru mení (pre niektoré deti prekvapujúco) spôsob riešenia úlohy, čo ich spätne upozorní na potrebu pozorného narábania s nimi. Podstata riešenia spočíva v „dedení“ pravdivosti smerom k vrchu tabuľky (objavia všetci), resp. v dedení nepravdivosti smerom dole (napadne spočiatku len niektorých). Medzi deťmi sa pre tento jav ujal termín „logická indukcia“. Cesta od nej k objaveniu všetkých riešení je veľmi príjemná.

4B: **Na tejto tabuľke je aspoň nula pravdivých tvrdení.**
Na tejto tabuľke je aspoň jedno pravdivé tvrdenie.
Na tejto tabuľke sú aspoň dve pravdivé tvrdenia.
Na tejto tabuľke sú aspoň tri pravdivé tvrdenia.
...
Na tejto tabuľke je aspoň desať pravdivých tvrdení.

Komentár: Elegantné riešenie vychádza zo správnej analýzy pridanej prvej vety. To, čo nasleduje, deti spontánne nazvali logické domino.

4C: Na tejto tabuľke sú aspoň tri pravdivé tvrdenia.

...

Na tejto tabuľke je aspoň desať pravdivých tvrdení.

Komentár: Malá zmena opäť zmení „fungovanie“ úlohy. Prvýkrát sa môže objaviť potreba prerátavania počtu viet v súvislosti s ich tvrdeniami. Úloha sa ešte zmení (a zjednoduší), ak začneme až s vetou o šiestich (alebo viac) tvrdeniach.

5A: Na tejto tabuľke je najviac jedno pravdivé tvrdenie.

Na tejto tabuľke sú najviac dve pravdivé tvrdenia.

Na tejto tabuľke sú najviac tri pravdivé tvrdenia.

...

Na tejto tabuľke je najviac desať pravdivých tvrdení.

Komentár: Ďalšia zmena kvantifikátoru spôsobí ďalšie komplikácie. Aj pre žiakov SŠ sme museli najskôr vyriešiť konkrétnu úlohu (pre 6 viet) a až potom sa vrátiť k tabuľke s n tvrdeniami. „Indukcia“ z úlohy 4A sa osvedčí aj v tejto úlohe, aj keď funguje opačným smerom. Pocitovo bola pre deti práca s týmto kvantifikátorom náročnejšia. Najskôr si pomohli určitým mechanickým prenesením postupov z úlohy 4A a potešili sa, ako rýchlo prišli k riešeniam. O to väčšie bolo prekvapenie, keď sa zistilo, že sú nesprávne. Rozdiel je v tom, že zatiaľ čo vety z úlohy 4A si súlad so svojim tvrdením a počtom príslušných viet na tabuľke zabezpečujú „svojpomocou“, v tejto úlohe musia siahnúť na „druhý koniec“ tabuľky. Pri tejto úlohe sa prvýkrát objavili nové postupy riešenia. Jedným z nich bolo preberanie „prípustných“ riešení a kontrola celkovej správnosti tabuľky, riešenie „od krajov“ tabuľky (pouvažujte o prvej a poslednej vete), „krížová“ kontrola a ovplyvňovanie jednotlivých viet (ak je prvá veta nepravdivá, potom to ovplyvňuje predposlednú vetu) atď.

Na tomto mieste by sa dali prirodzene doplniť úlohy 5B, 5C a prípadne „nepravdivé“ varianty úloh 4 a 5. Sú mysliteľné aj ich ďalšie úpravy, prechod na „párne“ varianty tabuliek, vynechanie niektorej (niektorých) viet z tabuliek atď. Riešiteľov týchto úloh určite čakajú vzrušujúce zážitky! V spomenutých prednáškach ale nebolo možné z časových (a ďalších) dôvodov tieto úlohy zaradiť a pokračovali sme nasledujúcou úlohou.

6: Na tejto tabuľke sú všetky tvrdenia nepravdivé.

Na tejto tabuľke sú všetky tvrdenia pravdivé.

Komentár: Ide u uvedenie ďalšej „zakázanej“ tabuľky. Podrobná analýza oboch viet ukáže drobné odlišnosti v ich „problémovosti“. Niekedy si veta na vytvorenie sporu vystačí sama, niekedy potrebuje spoluprácu druhého tvrdenia. Ide tiež o prípravu na ďalšiu úlohu.

**7A: Na tejto tabuľke je aspoň jedno nepravdivé tvrdenie.
Na tejto tabuľke sú aspoň dve nepravdivé tvrdenia.
Na tejto tabuľke sú aspoň tri nepravdivé tvrdenia.**

...

**Na tejto tabuľke je aspoň osem nepravdivých tvrdení.
Na tejto tabuľke sú všetky tvrdenia nepravdivé.
Na tejto tabuľke sú všetky tvrdenia pravdivé.**

Komentár: Ide o úlohu z KS SEZAM, ktorej analyzovanie a rozvíjanie prerástlo do tejto série úloh. K jej riešeniu treba využiť väčšinu z vyššie získaných skúseností. Posledné dve vety analyzujte podobne ako v úlohe 6, čím sa vyjasní postavenie prvých dvoch viet. Nasledovať môže „preskakovaná“ analýza zvyšných viet, kde napr. pravdivosť ôsmej vety ovplyvňuje tretiu vetu atď.

**7B: Na tejto tabuľke je aspoň jedno nepravdivé tvrdenie.
Na tejto tabuľke sú aspoň dve nepravdivé tvrdenia.
Na tejto tabuľke sú aspoň tri nepravdivé tvrdenia.**

...

**Na tejto tabuľke je aspoň sedem nepravdivých tvrdení.
Na tejto tabuľke sú všetky tvrdenia nepravdivé.
Na tejto tabuľke sú všetky tvrdenia pravdivé.**

Komentár: Zlomová úloha témy. Minimálne vzhľadom na sľub, že úlohy budú nielen obtiažnejšie, ale aj atraktívnejšie. Zopakovanie postupu z predchádzajúcej úlohy nás opäť raz privedie k zisteniu, že pre prostrednú vetu predpoklad pravdivosti aj nepravdivosti vedie k sporu. Tabuľku teda treba zahodiť resp. zakázať. Na tomto mieste ale deti dostávajú závažnú otázku: „A kto nám sľúbil, že pre každú vetu napísanú na nejakej tabuľke sa musí dať určiť jej pravdivostná hodnota? Videli sme už tri prípady, kde to tak nebolo. Na tabuľke sa vtedy vždy nachádzala veta, ktorej pravdivosť aj nepravdivosť viedla k sporu. Pomenujme tieto tvrdenia **sporné** a prestaňme tajiť ich existenciu. Uvidíme, či sa nám takáto úprimnosť oplatí!“

**8A: Na tejto tabuľke je aspoň jedno nepravdivé tvrdenie.
Na tejto tabuľke sú aspoň dve nepravdivé tvrdenia.
Na tejto tabuľke sú aspoň tri nepravdivé tvrdenia.**

...

**Na tejto tabuľke je aspoň sedem nepravdivých tvrdení.
Na tejto tabuľke sú všetky tvrdenia nepravdivé.
Na tejto tabuľke sú všetky tvrdenia pravdivé.
Na tejto tabuľke je aspoň jedno tvrdenie sporné.**

**8B: Na tejto tabuľke je práve jedno nepravdivé tvrdenie.
Na tejto tabuľke je aspoň jedno tvrdenie sporné.**

**8C: Na tejto tabuľke sú všetky tvrdenia nepravdivé.
Na tejto tabuľke sú všetky tvrdenia pravdivé.
Na tejto tabuľke je aspoň jedno tvrdenie sporné.**

Komentár: Zavedenie sporných viet znamenalo veľkú zmenu, ktorá deti upútala až fascinovala. Pridanie novej kategórie „pravdivosti“ viet znamenalo zmenu spôsobu riešenia úloh, v rámci ktorej sa ujasňoval význam tohto pojmu. Všetkých potešila „rehabilitácia“ zavrnutých tabuliek, aj keď nebola triviálna. Samozrejme, potešenie z riešenia týchto úloh už nechám na čitateľa.

Koniec prednášky priniesol aj krásnu otázku od jedného z poslucháčov: „A kto nám sľúbil, že každá veta musí byť pravdivá, nepravdivá alebo sporná? Čo ak každá možnosť vedie k sporu?“ Miestnosť sme opúšťali vo viacerých zanietených diskutujúcich skupinkách....

Na záver pár poznámok. Ďalšie rozvíjanie témy spočíva v hľadaní ďalších pekných úloh podobných úlohám 8. Všetky sa dajú ďalej modifikovať pridaním iného typu „sporných“ tvrdení („na tejto tabuľke je presne jedno tvrdenie sporné“, „na tejto tabuľke nie je žiadne sporné tvrdenie“ atď.). S každým z čitateľov sa rád podelím o nové objavy a skúsenosti v tejto oblasti. Určitý problém spočíva v rozsahu témy. Na prednáške pre stredoškóľakov sme riešili všetky uvedené úlohy. Asi len výnimočná zdatnosť poslucháčov spôsobila, že sme sa vtesnali do 1,5 hodinového časového limitu. Zlom medzi úlohami 7 a 8 zapôsobil na deti ako živá voda, ale aj tak sme sa pohybovali na hranici ich únavy a pozornosti. Asi najschodnejšie pre ďalšie rozvíjanie témy je jej rozloženie do viacerých pokračovaní, čím sa ale môže stratiť jej „údernosť“. Pre žiakov ZŠ odzneli počas 1 hodiny úlohy 1A, 1C, 2A, 2C, 3A, 3B, 4A, 4B, 6, 7A, 7B (úlohu 7A všetci poznali a riešili v rámci korešpondenčného seminára) a 8A. Téma bola motivovaná rozprávkou o meste, kde si obyvatelia pred svoje domy inštalovali tabule s rôznymi tvrdeniami a tzv. logická polícia kontroluje ich správnosť a korektnosť. Úlohy deti zaujali, ale zavedenie „sporných“ viet ich až tak neoslovilo (a nebolo na ne dost času). Pri prípadnom opakovaní by som túto časť úplne vypustil a radšej sa sústredil na úlohy 5. Téma je ale asi (naj)vhodnejšia pre študentov SŠ.

A miesto záveru jedna prémia. Presnejšie, príspevok k problematike kozmických letov. Analyzujte pravdivosť tvrdení na nasledujúcej tabuľke:

Čitatelia tohto článku boli na výlete na Marse.

Predchádzajúca veta je nepravdivá.

Predchádzajúca veta je nepravdivá.

Predchádzajúca veta je nepravdivá.

Predchádzajúca veta je nepravdivá.

Väčšina viet na tejto tabuľke je nepravdivá.