Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky

Milan Hejný, Jarmila Novotná

Naďa Stehlíková

(editoři)

1. díl

Praha 2004

Kapitola 19

Záporná čísla

Milan Hejný

19.1 Úvod ke kapitolám 19 a 20

Tradiční kurikulum staví do středu matematického vzdělání prvních čtyř ročníků základní školy seznámení se s přirozenými čísly a čtyřmi početními operacemi. Počínaje 5. ročníkem se začíná obor přirozených čísel rozšiřovat a to dvěma směry: k částem (zlomky a desetinná čísla) a záporným číslům. Každá z těchto oblastí představuje vážný a dobře známý didaktický problém. Jak zlomky, tak záporná čísla představují v genezi lidského myšlení významný zlom a jsou typickými představiteli „hluboké ideje" ve smyslu Z. Semadeniho (2002).[1]

Před padesáti lety vládlo mezi didaktiky přesvědčení, že úspěšnost výuky závisí na vhodné metodě výkladu těchto partií. Mnohaleté zkušenosti ukázaly, že žádná metoda výkladu neřeší daný problém zásadním způsobem. Žádná metoda totiž nevyhovuje všem žákům a navíc existuje nemalý počet žáků, kteří záporná čísla, ale zejména zlomky nepochopí vůbec, protože jsou přesvědčeni, že k pochopení těchto pojmů je potřebné zvláštní nadání, kterého se jim nedostalo. Úsilí učitele naučit takového žáka rozumět zlomkům nebo záporným číslům je marné, neboť žák s učitelem nespolupracuje. Existence těchto žáků vede didaktiku matematiky k rozdělení problému výuky záporných čísel a zlomků do dvou úrovní, z nichž každá je vymezena vlastním problémem.

1. *Jak otevřít svět záporných čísel a svět zlomků žákům, kteří o to mají zájem?*
2. *Jak působit na žáky, kteří jsou přesvědčeni, že nemají potřebné schopnosti, aby do těchto světů vstoupili?*

[1] V uvedené rozsáhlé studii Z. Semadeni paralelně s hlubokou ideou mluví o povrchové formě a formálních modelech. Jeho pojem povrchové formy je blízký našemu pojmu formální poznatek (viz kap. 2), ale ukazuje jej v jiné a podnětné optice.

Druhý problém je částečně diskutován v kap. 2. Zde jen připomeneme, že komplex méněcennosti se vytváří ve vědomí žáků v důsledku edukačního stylu, do kterého jsou žáci vpravováni již v prvních čtyřech letech školní docházky a který je orientován na paměťové učení. Žák, který si v této době osvojí styl učení se matematice založený na repetici a imitaci, nerozvine své schopnosti autonomní intelektuální práce a není připraven na náročné pojmy záporné číslo a zlomek.

V této a následující kapitole zkoumáme pouze první problém a rozkládáme jej do dvou podproblémů:

Jaké jsou příčiny nízkého porozumění záporným číslům/zlomkům žáky?
Jak je možné daný stav měnit k lepšímu?

Až dosud jsme mluvili o záporných číslech a zlomcích takříkajíc jedním dechem, jako by se jednalo o dvě příbuzné oblasti. Skutečnost je však jiná. Je pravda, že obě tyto oblasti představují z matematického hlediska rozšiřování oboru přirozených čísel a z didaktického hlediska pak vysokou náročnost. Její příčiny jsou ale jiné u zlomků a jiné u záporných čísel.

U zlomků jde o procesy porovnávání, sčítání, odčítání, násobení a dělení zlomků. Klíč k problému se nazývá „společný jmenovatel“ a jeho reprezentantem je pojem kmenový zlomek. U záporných čísel jde především o pojem sám, o jeho přijetí a zrovnoprávnění záporných čísel s čísly kladnými. Odlišnost didaktických problémů týkajících se záporných čísel a didaktických problémů týkajících se zlomků je tak značná, že u obou kapitol bude použita jiná metoda zkoumání. Rozdílně jsou obě tyto oblasti zastoupeny v odborné literatuře. Zatímco zlomkům se věnuje poměrně značná pozornost, je zájem o záporná čísla menší. Důvodem je zřejmě malý prostor pro experimentální výzkum.

19.2 Metoda zkoumání žákovských představ o záporných čísel

Metody zkoumání operačních dovedností žáků jsou dobře propracované. Schopnostem žáků manipulovat s celými čísly je věnováno mnoho kvalitativních a ještě více kvantitativních výzkumů. Daleko méně prací je věnováno pojmotvornému procesu pojmu záporné číslo. Při tomto zkoumání jde o zjišťování toho, jak se představa záporného čísla rodí a rozvíjí, jak se žákova sémantická zkušenost se záporným číslem propojuje s jeho strukturální zkušeností, jak příslušný pojmotvorný proces překonává různá úskalí. Takový výzkum nelze založit na klinickém experimentu, který mapuje pouze momentální stav, zde je potřebné dlouhodobé sledování. Proto je základním materiálem našeho studia dlouhodobé experimentální vyučování v jedné třídě (v letech 1984–1989).[2] Kromě toho jsme využili naší předchozí studie o žákovských představách čísla (Hejný; Stehlíková

[2]První výsledky týkající se výuky záporných čísel byly publikovány v článku (Hejný; Nôta 1990).

1999) jako teoretické východisko pro hledání sémantických modelů záporného čísla. Další doplňující informace jsme získali

1. z testů a sond uskutečněných v jiných třídách, nebo v klinických pokusech,
2. z komparativní analýzy současných žáků se žáky z doby „předkalkulačkové“,
3. použitím metody genetické paralely (viz oddíl 2.3),
4. rozborem pojmové koncepce několika učebnic pro 4., 5. a 6. třídu.

Didaktická literatura, která zkoumá problematiku záporných čísel, je většinou zaměřena na povrchovou vrstvu práce žáka se znaménky. Hlubší studie jsme našli jen ve starších ruských metodických učebnicích sedmdesátých a osmdesátých let minulého století. I když byl tehdejší výzkum zaměřen převážně na obsah, najdeme zde dobrou analýzu didaktického problému. Například M. D. Koškinová (1987, s. 17) píše:[3]

> Вопросы, связанные с введением отрицательных чисел, с изучением положительных и отрицательных чисел, являются найболее трудными для учащихся. История развитя математики показывает, что отрицательные числа значительно труднее дались человечеству, значительно труднее вошли в математику, чем дроби. Это обясняется тем, что отрицательные числа значительно меньше, чем дроби, связаны с жизню, практикой. Отрицательные числа возникли внутри самой математики в связи с выполнением действий, преоброзований с уже известными числами (натуральные, нуль, дроби).

M. D. Koškinová (1987) identifikuje tři hlavní myšlenky vztahující se k záporným číslům:

1. pozdní vstup záporných čísel do matematiky,
2. struktura aritmetiky jako cesta, kterou záporná čísla do matematiky vstupovala,
3. jejich malá přítomnost v reálném světě.

Přímá didaktická projekce těchto myšlenek je nasnadě – záporná čísla zavádět co nejpozději, při jejich zavádění zdůraznit strukturální kontext, jejich vypuštěním z osnov základní školy se moc zlého nestane. V dalším ukážeme, že taková projekce je unáhlená a že každá z myšlenek při projekci do prostředí školy potřebuje pečlivější rozbor.

[3]Otázky spojené se zavedením záporných čísel, se studiem kladných a záporných čísel, jsou pro žáky nejnáročnější. Historie rozvoje matematiky ukazuje, že záporná čísla se lidstvu poddávala daleko hůř, daleko složitěji vstupovala do matematiky než zlomky. To se vysvětluje tím, že záporná čísla jsou ve srovnání se zlomky daleko méně svázány s životem, s praxí. Záporná čísla vznikla uvnitř samotné matematiky v souvislosti s operacemi s již známými čísly (přirozenými, nulou, zlomky). (Vlastní překlad.)

19.3 Ilustrace a historický poukaz

Cílem následujících ilustrací je upřesnit, v čem je problém představy záporného čísla.

Ilustrace 1. Ve třech druhých třídách gymnázia (šestnáctiletí žáci) byla v testu spolu s dalšími úlohami zadána i nerovnice $x + \sqrt{a-x} < a$, kterou měli žáci řešit pro (a) $a = 4$, (b) $a = -1$. Z asi padesáti žáků, kteří tuto úlohu řešili, asi třetina případ (b) vůbec neřešila, protože napsali, že výraz $\sqrt{-1-x}$ nemá smysl nebo že pod odmocninou nesmí být záporné číslo nebo něco podobného. Symbol $-x$ interpretovali jako číslo záporné. Této chyby se dopustil i jeden ze tří žáků, kteří úlohu (a) vyřešili vtipnou úvahou: $\sqrt{4-x} < 4 - x \Leftrightarrow 1 < 4 - x \Leftrightarrow x < 3$.

Komentář 1. Je pozoruhodné, jak silně je znaménko mínus asociováno s představou záporného čísla. V písemných projevech žáků běžně nacházíme chyby jako $-3+1 = -4$ (podle pravidla „mínus a plus dají mínus“), nebo $|-x| = x$ pro všechna reálná x.

Ilustrace 2. V posledním kole XXII. ročníku MO SSSR řešili žáci 9. ročníku rovnici

$$(1 + \frac{1}{m})^{m+1} = (1 + \frac{1}{1988})^{1988} \text{ pro } m \in \mathbf{Z}.$$

Pouze 40 % řešitelů našlo a správně zdůvodnilo jediné řešení $m = -1989$.[4]

Komentář 2. Malé procento úspěšných řešitelů bylo překvapivé, protože úroveň soutěžících v posledním kole sovětské MO byla tradičně velmi vysoká. Klíčem k řešení bylo uvědomění si, že m může být záporné. Pak substituce $n = -m$ ve rychle k výrazu, z něhož je řešení zřejmé.

Ilustrace 3. Asi před dvaceti lety dával T. Hecht nejen studentům, ale i kolegům tuto úlohu: Najděte čtyři po sobě jdoucí celá čísla, jejichž součin je 24. Každý profesionální matematik ihned řekl $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, ale podstatně déle mu trvalo nalezení druhého řešení: $(-4)(-3)(-2)(-1) = 24$. Autor sám ihned odpověděl, že 4! je jediné řešení. Až když na žádost T. Hechta začal svoje tvrzení dokazovat, poznal, že zapomněl na záporná čísla.

Komentář 3. Ilustrace ukazují, že záporná čísla jsou pociťována (a to nejen žáky základní školy) jako něco nepřirozeného, co se do našeho vědomí vtírá jako cizorodý prvek a co tam pak přetrvává v méně osvětlené a méně dostupné oblasti paměti. Dobře to ilustruje autorova reakce na Hechtovu úlohu. V první reakci mu záporná čísla vůbec nepřišla na mysl. Teprve důkaz jako cesta nabytí jistoty ho do této odlehlejší oblasti vědomí dovedl.

Historický poukaz. Řecká matematika, která v oblasti geometrie dospěla až k axiomatickému budování disciplíny, záporná čísla neznala. R. Descartes jako první dává záporným číslům interpretaci – jsou to souřadnice bodů na ose x, vlevo od počátku. Sám ale tato čísla nazývá *klamná*. S nedůvěrou hleděli na záporná čísla i objevitelé infinitezimálního počtu.

[4]Matematika v škole, 1988, číslo 5, s. 55, rusky.

Až v roce 1770 zavádí L. Euler do algebry záporná čísla jako plnohodnotné veličiny, ale cítí potřebu jejich zavedení zdůvodnit i sémanticky. Náročnou operaci $-(-a) = a$ osvětluje slovy „zbavit někoho dluhu znamená dát mu dar“. Tím ale ještě nejsou záporná čísla legalizována všemi matematiky. L. Carnot je připouští jako fiktivní veličiny, které ulehčují výpočty, ale upozorňuje, že často způsobují chybné závěry v úvahách.[5] A. de Morgan v roce 1831 píše, že imaginární výraz $\sqrt{-a}$ a záporný výraz $-b$ se shodují v tom, že objeví-li se ve výsledcích úloh, svědčí o jisté absurditě a protiřečení. Z hlediska skutečného významu jsou oba výrazy stejně nereálné, protože $0 - a$ je stejně nepochopitelné jako $\sqrt{-a}$.[6] Tato a další historická svědectví o lopotné cestě člověka k pojmu záporné číslo lze najít např. v páté a sedmé kapitole knihy (Kline 1980).

19.4 Příčiny náročnosti záporných čísel

Příčiny didaktické náročnosti záporných čísel naznačené M. D. Koškinovou (1987) a ilustrované v předchozím oddíle teď přeuspořádáme, rozvedeme a doplníme. Náš seznam bude mít čtyři položky: Řídký výskyt záporných čísel v reálném světě, jejich náhlý vpád do vyučování, způsob jejich výuky, zaměřený na nácvik pravidel, jejich faktická nepotřebnost.

Řídký výskyt záporných čísel v reálném světě. Je pravda, že záporné číslo se objeví na teploměru, na řídící desce výtahu, při počítání zisků a ztrát v oblasti financí nebo při práci s letopočty – např. v informaci „Aristoteles se narodil v roce -384“. Tato sémantická podpora záporného čísla je však v porovnání se sémantickou podporou kladného čísla slabá. Navíc i v uvedených situacích je záporné číslo často nahrazováno kladným v opozitní kvalitě, která je vyjádřena slovně. Například v informacích „garáže jsou v druhém podzemí“, „je pět pod nulou“, „Aristoteles se narodil v roce 384 před Kr.“ se záporné číslo neobjevilo.

I oblast, která je zdánlivě nejpřízniveji otevřená používání záporných čísel – finance – není v reálném životě se zápornými čísly spjata. Neřekneme „mám mínus sto korun“, ale „mám sto korun dluhu“ nebo „schází mi sto korun“. Informaci „dlužíš mi mínus sto korun“ by asi jen matematik pochopil jako „dlužím ti sto korun“.

Základní model přirozeného čísla – počet předmětů – nemá v oblasti záporných čísel ekvivalent. Záporné číslo nemůže žák vnímat smysly.

Náhlý vpád záporných čísel do výuky. Bez náležité propedeutické přípravy vstupuje do výuky mnoho pojmů. U náročných pojmů, jako je zlomek, procento, poměr nebo geometrická transformace, je absence dostatečně dlouhé propedeutické fáze didakticky

[5] Příkladem může být paradox A. Arnaulda: Mám-li dvě různá čísla a větší vydělím menším, musím dostat něco jiného, než když menší vydělím větším. Jenže $(-1) : (+1) = (+1) : (-1)$.

[6] A. de Morgan, stejně jako žáci z ilustrace l, považuje znaky a i b za nezáporná čísla.

velice závažná. Samozřejmě se to vztahuje ve zvýšené míře i na záporná čísla. Naskýtá se však otázka, jak tento pojem, v životě tak málo frekventovaný, žákům předkládat již, řekněme, ve 2. ročníku. To bude vážné téma dalších úvah.

Způsob výuky záporných čísel zaměřený na nácvik pravidel. Nepočetné sémantické modely záporných čísel se brzo oddělí od strukturálních pravidel a tato pak převezmou hlavní slovo v představě záporného čísla. Navíc někdy jsou podávána v těžce stravitelné podobě. Např. v učebnici (Urbanová aj. 1985, s. 116) je v graficky zvýrazněné formě uvedeno:

(a) Mají-li dvě čísla stejná znaménka, sečteme je jako přirozená čísla. Znaménko součtu je shodné se znaménkem sčítanců.
(b) Mají-li dvě čísla různá znaménka, odečteme je jako přirozená čísla, tj. od většího přirozeného čísla odečteme menší. Znaménko součtu je shodné se znaménkem čísla, které je na číselné ose dále od nuly.

S radostí konstatujeme, že v současných učebnicích jsme podobnou verbální mystiku neobjevili. Nedostatkem některých současných učebnic je nárazovost práce. Záporná čísla jsou v některém tematickém celku až přebujelá, ale vzápětí se z učebnice vytrácí.

Faktická nepotřebnost záporných čísel. K čemu je potřebujeme? Pokud jde o teploměr, výtah nebo vrstevnici mořského dna, jistě můžeme znaménko mínus použít, ale to není důvod k tomu, abychom věnovali výuce záporných čísel tolik pozornosti, aby učitelé stále žákům opakovali, že „mínus krát mínus dává plus“ nebo „násobíme-li nerovnost záporným číslem, znaménko se mění“. Konečně celá skvělá řecká matematika se bez záporných čísel obešla a až do poloviny 18. století je matematici nepotřebovali. Jestliže tedy budeme ve škole záporná čísla zavádět, musíme vědět, co nás k tomu opravňuje. To je další námět ke zkoumání, zřejmě nejzávažnější. Kdybychom totiž dospěli k názoru, že záporná čísla jsou nepotřebná, asi bychom je z osnov vypustili. Konečně současné osnovy je odsouvají až do 6. ročníku. Tím se ale nutnosti odpovědět na jejich oprávněnost ve výuce základní školy nevyhneme.

Náznak odpovědi na položenou otázku nám poskytne historie matematiky. Ukáže nám, kde absence pojmu záporné číslo vede k vážným konfliktům. Druhý a podle našeho názoru závažný poukaz na smysl vyučování záporným číslům může dát zamyšlení, zda má tento abstraktní pojem být součástí poznatkové struktury vzdělaného člověka naší doby.

19.5 Místo záporných čísel v matematice základní školy

Ilustrace 4. Petr a Michal, žáci 2. ročníku, společně řešili domácí úlohu $5 - 7 + 4 = ?$. Úloha vznikla špatným opsáním zadání z tabule. Na tabuli bylo napsáno $50 - 7 + 4 = ?$, ale Petr to chybně opsal. Petr řekl, že se to nedá, protože když mám 5, nemohu vzít 7.

Michal řekl, že se to dá, když nejdřív přidám 4 a pak od 9 odeberu 7. Podle Michala je výsledek 2. Petrovi rodiče, kteří byli požádáni dětmi o radu, měli též různé názory. Matka mínila, že učitelka si neuvědomila, že dává druhákům nekorektní úlohu. Otec tvrdil, že Michal provedl dobrý výpočet a že výsledek je kladný, tedy je to v pořádku. Otec našel i příběh, který by opravňoval existenci výpočtu: Hrál jsem kuličky; nejprve jsem jich vyhrál 5, pak 7 prohrál a nakonec ještě 4 vyhrál. Celkově jsem vyhrál 2 kuličky. Dětem tento otcův výklad nebyl úplně jasný. Chtěli vědět, kolik kuliček měl otec před hrou. Nakonec mi Petrův otec, můj přítel, zavolal a telefonem požádal o vyřešení sporu.

Komentář 4. Především nutno zdůraznit, že úloha se objevila náhodně, nebyla dána ve škole. Tím, že oba hochy zaujala a upozornila na zajímavý jev, pomohla propedeutice pojmu záporné číslo. Jako problémová situace může být zařazena do učebnice 2. ročníku. Důležité ale je, že nebude řešena, ale diskutována tak jako úloha v naší ilustraci.

Vraťme se k příběhu. Michal uchopil nápis $5-7+4=?$ v kontextu aritmetické struktury. Aniž by čísla sémanticky interpretoval, použil komutativní zákon, který již dříve objevil jako znalost v činnosti („při sčítání a odčítání mohu čísla jakkoli prohazovat“). Petr uchopil daný nápis sémanticky a při jeho čtení narazil na epistemologickou překážku: Co to je $5-7$? Petrův otec našel sémantický model, který lze znázornit schématem na obr. 19.1.

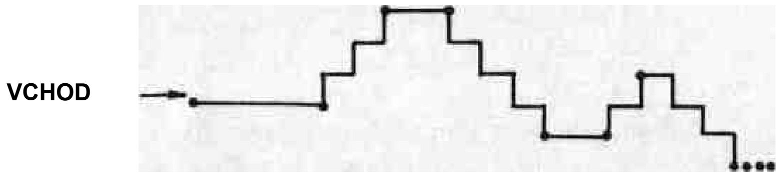
$$\boxed{\text{Vstupní stav}} \xrightarrow{+5} \boxed{\text{Stav po první změně}} \xrightarrow{-7} \boxed{\text{Stav po druhé změně}} \xrightarrow{+4} \boxed{\text{Výstupní stav}}$$

Obr. 19.1

V něm jsou všechna tři čísla operátory změny a kromě nich se objevují čtyři utajená čísla – stavy. Reakce dětí na otcův model byla logická. Domnívaly se, že k porozumění potřebují znát vstupní stav. Otcův model ale lze upravit tak, že absence stavů nebude překážet.

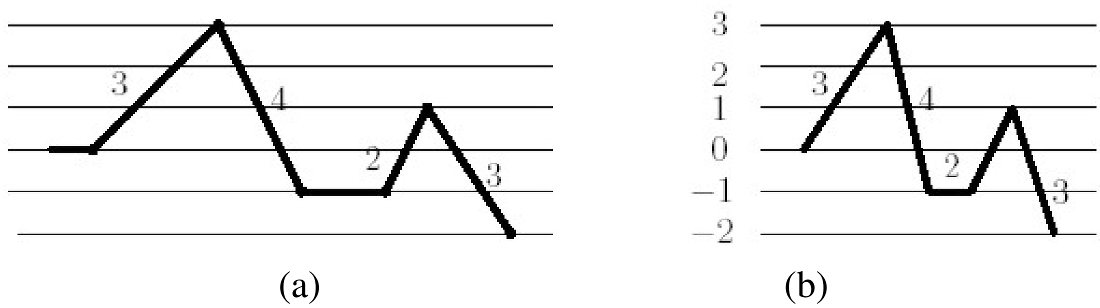
Ilustrace 5. Model „Tajná chodba“. Učitel vypráví žákům 2. třídy dobrodružný příběh. Honza, hrdina příběhu, prochází tajnou chodbou, která někdy po schodech stoupá, jindy klesá. Hrdina ví, že až se dostane na úroveň, která leží 12 schodů pod úrovní vchodu, musí hledat tajné dveře. Žáci evidují pohyb hrdiny a upozorní učitele, když se hrdina dostane na úroveň tajných dveří. První dva příběhy hry „tajná chodba“ jsme kreslili na čtverečkované tabuli (obr. 19.2). Pak si již cestu zaznamenával každý žák sám.

Podle diktátu učitele „Honza vystoupal 3 schody nahoru, pak udělal krok rovně, pak čtyři schody sestoupil dolů, ...“ si žáci na čtverečkovaný papír kreslili obrázek tajné chodby. Při opakování hry si někteří žáci začali záznam zjednodušovat. Při dalších opakováních se objevila řada různých zápisů. Z nich zmíníme pět, které ukazují, jak se žákům během dvou let podařilo dospět k zápisu pomocí záporných čísel.



Obr. 19.2

1. (Obr. 19.3a): Každé schodiště je nahrazeno úsečkou a číslem.
2. Záznam se zhustí.
3. (Obr. 19.3b): K záznamu přibude číslování úrovní.
4. Zápis je linearizován, např. žák již nekreslí, ale zapíše $3\uparrow\ 4\downarrow\ 2\uparrow\ 3\downarrow$.
5. Šipky jsou změněny na znaménka: $+3-4+2-3$.



Obr. 19.3

Komentář 5. V první etapě poznávání situace Tajná chodba je úlohou žáka graficky evidovat učitelem popsaný pohyb hrdiny příběhu. Učitelův popis je proces, žákův obrázek je odpovídající koncept. Opakovaná zkušenost žáka s transformací proces → koncept postupně vytváří ve vědomí žáka procept celé situace (Gray; Tall 1994). Žák, který již má tento procept vytvořen, je schopen na základě obrázku popsat pohyb hrdiny, a to třeba i pozpátku, jako při hrdinově návratu ke vchodu. Druhá etapa poznávání situace Tajná chodba směřuje k ekonomizaci zápisu. Někteří žáci začnou poměrně záhy hledat úspornější zápis. Jiným to trvá déle a někteří převezmou způsob šikovného zápisu od spolužáků. Nicméně k zápisu pomocí kladných a záporných čísel se žáci dopracují až po několika měsících. Učitel, který úsporný zápis žákům prozradí, urychlí sice jejich poznání, ale výrazně znehodnotí jeho kvalitu. Bude to poznání, které většina žáků převezme jako izolovaný (tedy formální) poznatek. I ti, kteří pochopí, jak se k takovému zápisu došlo, budou ochuzeni o vlastní objev a tím i o nárůst schopnosti objevovat efektivnější zápisy.

Didaktická působivost tohoto modelu je dána jeho názorností, možností modifikací a schopností pokrýt další podobný model – cestování ve výtahu. Je to tedy generický model pro pohyby ve směru vertikálním. Ke směru horizontálnímu se dostaneme v oddíle 19.8.

19.6 Sémantické modely záporných čísel

Dva sémantické modely vhodné pro propedeutiku záporných čísel jsme viděli v ilustracích 4 a 5. Teď se pokusíme najít všechny typy generických modelů, které vycházejí ze separovaných sémantických modelů přirozených čísel. Východiskem bude analýza představ přirozených čísel popsaná v (Hejný; Stehlíková 1999, tabulka s. 100).

Z modelů evidovaných v tabulce se omezíme na ty, které mají aditivní strukturu. Z nich vypustíme dva, které se nespojují se záporným číslem: jméno a počet. Je asi málo pravděpodobné, že by nějaký objekt měl jméno -7, ale i kdyby tomu tak bylo, víme, že jména jako modely čísel jsou z hlediska aritmetické struktury nezajímavá. Daleko zajímavější je počet, tedy množství, jehož jednotkou je jeden kus. Ten však do záporných čísel nevstupuje, protože o záporném množství nelze mluvit. Zbývají tedy čtyři typy, které probereme.

Adresa je údaj místa nebo času vyjádřený záporným číslem. Separovanými modely jsou reálné stupnice (teploměr, výtah), generickým modelem je *číselná osa*. Nejprve je vnímána ve dvou tvarech, jako svislá a vodorovná. Později dojde k poznání izomorfizmu obou těchto modelů. Způsob objevu svislé číselné osy jsme viděli v ilustraci 5. O vodorovné číselné ose píšeme podrobně dále.

Veličina je uspořádaná trojice (číslo, jednotka, objekt). I když záporné veličiny existují, nevstupují do světa žáka na 1. stupni základní školy. Výjimku tvoří kapitál měřený v korunách a teplota měřená ve stupních Celsia. Jenže v představě žáka je teplota vnímána ne jako veličina, ale jako adresa na stupnici teploměru. Přesněji, žák ještě nediferencuje mezi teplotou a její evidencí na teploměru, asi tak jako většina z nás nerozlišuje mezi váhou a hmotností. Tedy na prvním stupni základní školy jedině *finanční model* zaujme některé žáky tak, že se pro ně stane generickým. Další záporná veličina vstoupí do vědomí žáka až později, například při pojmu orientovaný úhel. Připomeňme, že lze mluvit i o orientovaném obsahu a orientovaném objemu a že tyto veličiny též mohou být záporné. Takové objekty se objevují v integrálním počtu.

Operátor porovnání měří kvantitativní rozdíl dvou adres nebo mnohostí nebo operátorů. Přitom může být použito i záporné číslo, ale běžně se to nedělá. Výpovědi „Karel je -3 cm vyšší než Láďa“ a „dlužíš mi -50 korun“ zní podivně, byť jejich smysl je jasný: „Karel je o 3 cm menší než Láďa“ a „já ti dlužím 50 korun“. Jediná nám známá situace, kde se u porovnání údajů přirozeně objeví záporná čísla, je porovnávání souboru údajů s jedním pevným číslem, například průměrem. Tak představíme-li si, že v odstavci je na devíti řádcích 126 slov, průměrně vychází na jeden řádek 14 slov. Počet slov v jednotlivých řádcích je 12, 15, 15, 14, 16, 15, 13, 14, 12. Tedy odchylky od průměru u jednotlivých řádků jsou $-2, 1, 1, 0, 2, 1, -1, 0, -2$. Podobné úlohy jsou propedeutikou statistiky a mnozí z našich žáků si je oblíbili.

Operátor změny měří změnu adresy nebo mnohosti nebo operátora. Podobně jako v předešlém případě i zde záporné číslo použijeme, jen když je změn více. Například změny výšky při putování tajnou chodbou (ilustrace 5). Pokud opisujeme jedinou změnu, záporné číslo nepoužijeme. Přesto některé naše žáky, zejména ve 4. a 5. ročníku, takové podivné opisy operátorů silně motivovaly. Představy, které přitom vznikaly, nazveme opozitní modely.

Opozitní modely jsou modely, v nichž vystupují prvky dvou číselně opozitních kvalit: majetek – dluh, vpravo – vlevo, nahoru – dolů, vpřed – vzad apod. Výrok „Pepík dal dva vlastní góly“ byl změněn na „Pepík dal -2 góly“. Vůči tomu jeden hoch namítal: „Kdyby dal Pepa i dva normální góly, dal by pak $2 - 2 = 0$ gólů, což je lež, neboť on dal 4 góly.“ Jiný hoch mínil, že z hlediska výsledku dal Pepa skutečně 0 gólů. Zajímavé byly i úvahy o domněle opozitních modelech jako noc – den, sudý – lichý, chytrý – hloupý. Do této linie patřil výrok 3 hoši $+$ 3 dívky $= 0$, který jedna dívka interpretovala takto: „Když se vezmou, žádný nebude svobodný, hoši budou ženatí, dívky budou vdány.“

Debaty o opozitních modelech bývaly dlouhé a pomáhaly účastníkům, kteří se jich zúčastňovali se zápalem, prodiferencovávat představy pojmu záporné číslo.

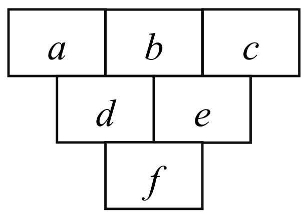
19.7 Strukturální modely záporných čísel

Jestliže u sémantických modelů šlo o to budovat představu žáka o tom, co to je záporné číslo, u strukturálních modelů jde o budování struktury celých čísel, v níž nebudou záporná čísla v hlubokém ústraní.

V ilustraci 4 jsme viděli, jak Michal zjistil, že $5 - 7 + 4 = 2$. K výpočtu použil komutativní zákon $5-7+4 = 5+4-7$, tedy nástroj struktury. Nevíme, jak by odpověděl na otázku, kolik je $5 - 7$. Možná by souhlasil s Petrem, že to se udělat nedá, ale možná by řekl, že to je číslo -2. Tak na podobnou otázku reagovalo v našich nedávných sondách více žáků 3. a několik žáků 2. ročníku. V porovnání s dobou před třiceti lety současní žáci nespojují záporné číslo s mystériem, protože jej znají z kalkulačky. Děti, které si s kalkulačkou rády hrají, si mínus i některé jeho aritmetické vlastnosti rychle osvojí. Je jasné, že zde se nejedná o plnohodnotné porozumění záporným číslům, dokonce ani ne o porozumění strukturální, ale přinejmenším o generický model situace „když od menšího čísla odčítám větší, dostanu číslo záporné“. Děti mluví o záporném čísle jako o čísle „s tím mínusem“.

Hlubší strukturální porozumění záporným číslům poskytnou žákům situace, v nichž se záporná čísla objeví v jistém aritmetickém kontextu. Tři takové situace ukážeme.

Sčítací trojúhelníky. Na obr. 19.4 je do tvaru trojúhelníku uloženo 6 čísel a, b, c, d, e, f. Tato čísla jsou vázána vazbami (1) – (3). Tedy pod každou dvojicí sousedních čísel je jejich součet. Žáci 3. ročníku toto schéma již znají a umí doplňovat trojúhelník, když jsou v něm dána čísla a, b, c nebo čísla a, b, f apod. Dáme-li například trojici $a = 1$, $d = 4$, $e = 2$, bude $f = 6$, $b = 3$, $c = -1$. Je zajímavé, že žáci 3. ročníku, kteří bez problémů řešili pomocí kalkulačky úlohu $274 - 311 = -37$, měli u této úlohy, kterou řešili s odstupem asi jednoho měsíce, problémy. Jakmile se ale jeden žák zeptal, zda může do okénka tabulky zapsat i číslo mínus jedna, hned většina žáků úlohu vyřešila. Z toho vidíme, že i když se žáci pomocí kalkulačky seznámí se zápornými čísly a čísla akceptují, ještě je nevnímají jako čísla zcela legální. Konečně v ilustracích 2 a 3 jsme viděli stejné chování i u profesionálů.



Platí:

$$a + b = d \qquad (1)$$
$$b + c = e \qquad (2)$$
$$d + e = f \qquad (3)$$

Obr. 19.4

Prostředí sčítacích trojúhelníků (se třemi, čtyřmi, nebo i pěti čísly v prvním řádku) lze využít na kultivaci porozumění aritmetické struktuře. Další dvě úlohy tyto možnosti ilustrují.

Úloha 1. Do sčítacího trojúhelníku z obr. 19.4 vložte místo písmen tuto šestici čísel: (a) 1, 2, 3, 4, 5, 9; (b) -1, 1, 2, 2, 4, 4.

Úloha 2. Ve sčítacím trojúhelníku s deseti čísly (v prvním řádku jsou čtyři čísla) známe číslo a v pravém okénku horního řádku, číslo f ve středním okénku druhého řádku a číslo j ve spodním okénku trojúhelníku. Zjistěte, jaké může být číslo d ležící v pravém okénku horního řádku. Víte, že (a) $a = 5$, $f = 1$, $j = 10$; (b) $a = 5$, $f = 2$, $j = 10$.

Tramvaj. Hra byla původně vytvořena jako nástroj na rozvoj schopnosti žáků evidovat větší soubory údajů. Myšlenka je prostá. Učitel vypráví, jak jede tramvaj z jedné konečné na druhou. Do tramvaje na konečné nastoupí jistý počet cestujících, na první zastávce někdo vystoupí a několik lidí nastoupí. To se opakuje ještě na dalších zastávkách, nakonec tramvaj dorazí na druhou konečnou a žáci mají říct, kolik cestujících zde vystoupí. Pak učitel klade další otázky jako „Kolik cestujících se v tramvaji vezlo mezi druhou a třetí zastávkou?“, „Na které zastávce do tramvaje nastoupili tři lidé?“, „Kdy bylo v tramvaji nejvíce lidí?“ apod. Později byla hra různě modifikována a jedna modifikace spočívala v tom, že neznámým číslem nebyl počet lidí, kteří vystoupili na poslední zastávce, ale počet lidí, kteří nastoupili na první zastávce. Při této modifikaci bylo někdy nutné pracovat se zápornými čísly. K tomu jsme mohli přistoupit, jen když již žáci (2. ročník) uměli změny lidí dobře evidovat.

V měsících listopad 2003 až duben 2004 uskutečnila jedna učitelka v 1. třídě experiment s dramatizovanou hrou Tramvaj. Experimentu věnovala celkem 15 vyučovacích hodin a náročnost hry postupně zvyšovala. Na poslední hodině se hrála již značně náročná hra: Tramvaj má dva vagóny (dvě hlubší škatule), trať má dvě konečné zastávky a dvě další zastávky a na každé stanici nastupují i vystupují muži, ženy i děti (plastikové lahve tří různých typů). Žáci všechny tyto údaje poměrně úspěšně piktograficky evidovali ve svých záznamových listech a dokázali na základě této evidence zjistit, kdy kolik mužů, žen a dětí jelo v celé tramvaji. Motivačně byla hra velice úspěšná až do konce; zřejmě i proto, že učitelka umně zapojovala žáky do rolí režiséra, manipulátora, řidiče tramvaje a zapisovatele. Přínos hry pro matematický rozvoj žáků spočíval zejména ve třech směrech:

- zvýšení porozumění číslu ve funkci operátora změny,
- schopnosti pomocí piktografického jazyka tabulkou evidovat demonstrovaný proces,
- z vytvořeného záznamu vyvozovat další údaje.

Posloupnosti vztahů. Známou úlohu „najdi další číslo“ (např. v posloupnosti 1, 4, 7, 10, ?) jsme v experimentálním vyučování modifikovali na úlohu „najdi další vztah“. V tab. 19.1 jsou ve třech sloupcích tři posloupností vztahů. U všech je úlohou žáka napsat další vztahy. První dva sloupce jsou určeny žákům 3. ročníku, poslední žákům 5. a 6. ročníku. Ke každé posloupnosti lze vytvářet další doplňující otázky, například u poslední se lze ptát, zda v posloupnosti bude člen, jehož číslo na pravé straně bude méně než -100.

$5-1+6=10$	$4-1+6=9$	$3+2+1=6$
$5-2+7=10$	$4-2+6=8$	$4+3+2-1=8$
$5-3+8=10$	$4-3+6=7$	$5+4+3-2-1=9$
$5-4+9=10$	$4-4+6=6$	$6+5+4-3-2-1=9$
$5-5+10=10$?	$4-5+6=5$?	$7+6+5-4-3-2-1=8$?

Tab. 19.1

Didaktický záměr uvedených her je orientován na překonávání předsudku, že záporné číslo je objekt ilegální. V těchto vztazích se kladná a záporná čísla navzájem prolínají a pokaždé se v posloupnosti přechází z jedné oblasti do druhé při zachování aritmetických pravidel hry.

V předchozích úvahách hrálo dominantní roli záporné číslo jako pojem. V předposledním oddíle ukážeme ještě jeden generický model, který jsme sice již zmínili, ale zatím jsme jej neuvedli – model Panáček. Na základě našich zkušeností a experimentů se právě tento model ukázal pro většinu žáků jako nejúčinnější nástroj na porozumění aritmetickým operacím, zejména vztahu, jehož hovorová formulace zní: „dva mínusy dávají plus“.

19.8 Model Panáček

Podobně jako u Tajné chodby, i zde jde o model adresově-operátorový. U Tajné chodby se začínalo s operátory (o kolik schodů vystoupím/sestoupím) a adresy, tedy úrovně schodů, vstoupily do modelu až později (obr. 19.3b).

Zde bude číselná osa dána hned na začátku. Po této ose chodí panáček P, který pohybem sčítá i odčítá. Přitom pracujeme s čísly dvou typů. Jsou to

adresy – čísla zobrazená na číselné ose,
operátory – čísla určující počet kroků, které panáček P udělá:

– kladné číslo přikazuje počet kroků, které má panáček udělat vpřed,

– záporné číslo přikazuje počet kroků, které má panáček udělat vzad.[7]

Každý číselný nápis jako $5 + 3$ nebo $3 - (-5)$ nebo $5 - (-3 - (2 - 4))$ chápeme jako instrukci pro pohyb panáčka P. Tato instrukce se řídí čtyřmi pravidly:

- Nápis čteme zleva doprava. První číslo je adresa, na kterou se P postaví tváří k $+\infty$.
- Každé další číslo nápisu je operátor určující počet kroků, které P udělá.
- Objeví-li se v nápisu mínus před závorkou, udělá P čelem vzad.[8]
- Ukončení závorky, před kterou bylo mínus, znamená opět příkaz čelem vzad.

<u>Příklad</u>. Ukážeme výpočet $3 - 1 - (-5 + 2) + 4 = 9$. (Viz tab. 19.2.)

Rozklad nápisu na prvky							Akce panáčka P
3							P se postaví na číslo 3 tváří k +∞
	- 1						P udělá krok vzad, je na čísle 2 tváří k +∞
		– (					P udělá čelem vzad, je na čísle 2 tváří k -∞
			-5				P udělá 5 kroků vzad, je na čísle 7 tváří k -∞
				+ 2			P udělá 2 kroky vpřed, je na čísle 5 tváří k -∞
					)		P udělá čelem vzad, je na čísle 5 tváří k +∞
						+4	P udělá 4 kroky vpřed, je na čísle 9 tváří k + ∞

Tab. 19.2

[7]Tyto kroky nazvali žáci „račí kroky“ a později „korky“ – slovo krok je čteno pozpátku.
[8]Toto pravidlo umožňuje porozumění návodu „dva mínusy dají plus“.

Hra se realizuje jako divadlo. Číselná osa je nakreslená na podlaze a vždy jeden žák po ní chodí. Začínáme s jednoduchými nápisy a postupně je prodlužujeme. Kritickým momentem je okamžik, kdy panáček poprvé vstoupí do záporných čísel a my tuto část osy musíme dokreslit. Druhý kritický okamžik nastane, když zavedeme povel „čelem vzad“. Bylo by výborné, kdyby jej objevili žáci sami, ale nás v našem experimentálním vyučování to nenapadlo udělat.

19.9 Nula

Záporná a kladná čísla jsou dva protilehlé světy. Jsou odděleny jediným číslem, nulou. Ta, jak známo, patří k náročným objektům matematiky. V roli jmenovatele zlomku nebo dělitele je nula záludná. Ani mnohonásobné opakování pravidla o nepřípustnosti dělení nulou nedokáže odstranit hojně se vyskytující chyby v práci s nulou.

Hlavní výsledek našich výzkumů zaměřených na hledání příčin náročnosti nuly lze formulovat pomocí tří tezí:

1. Nula nemá v představě žáka sémantické ukotvení.
2. Nula jako objekt aritmetické struktury, stojí izolovaně; zejména v její multiplikativní podstruktuře.
3. Žáci 6. či 7. ročníku jsou schopni samostatně dojít k poznání, že nelze rozumně zavést operaci (např.) $12 : 0$ ani objekt $\frac{0}{0}$.

   Každou z tezí blíže rozvedeme.

1. Svízel se sémantickým ukotvením čísla nula osvětluje běžný jazyk. V situacích, v nichž matematik použije termín nula, se v běžném životě používá jiné vyjádření. Neřeknu „mám nula korun“, ale „nemám nic“ nebo „jsem bez peněz“. Neřeknu „rychlost auta je nula km/h“, ale „auto stojí“. Neřeknu „nulté podlaží“, ale „přízemí“, a to navzdory skutečnosti, že příslušné tlačítko ve výtahu je někdy označeno znakem 0.

   V běžných situacích je nula vnímána spíše jako kvalita než kvantita a tím se jakoby izoluje od světa čísel. Dokonce při počítání letopočtu se rok 0 ztratil. Po roce -1, tedy po roce 1 př. Kr., následuje ihned rok $+1$, tedy rok 1 po Kr. Pojmu „nula“ budou žáci dobře rozumět pouze tehdy, když jej budou vnímat i jako nástroj na popis reálných situací. Tuto schopnost nabudou, jestliže občas ve třídě zazní věta typu „letos je naše třída ve druhém patře, v příštím roce budeme v nultém“, nebo „mám nula korun“, nebo „před deseti lety měla Lenčina maminka nula dětí a teď již má tři“ apod.
2. Tezi argumentačně podpoříme dvěma experimenty. Asi šedesát žáků 2. a 3. ročníku základní školy řešilo písemně úlohu: *Měl jsem* 5 *korun. Koupil jsem si bonbony za* 5 *korun. Kolik korun mám teď?* Nejčastější odpověď zněla „nic“, nebo „teď nemám nic“. Jen devětkrát se v odpovědi objevilo číslo 0. Ve čtyřech případech ji však žák

škrtnul a napsal „Nemám nic“. Druhý experiment je vlastně dlouhodobé šetření. Mnoha žáků i studentů jsme se v posledních dvaceti letech ptali, jak vysvětlí pravidlo „nulou dělit nelze“. Drtivá většina tázaných se omezila na konstatování, že tak jim to řekli ve škole. Jen zřídka došlo k pokusu pravidlo osvětlit a většinou se jednalo o konstatování „to prostě nejde“ nebo o myšlenku limity. Velice jasnou argumentaci tohoto typu uvedl jeden žák 7. ročníku: „Když malé kladné číslo x klesá, roste číslo $1 : x$ do nekonečna, a kdybychom připustili, že $x = 0$, bylo by $1 : 0 = \infty$. Takový znak ale není číslem, proto nulou dělit nelze.“

3. V experimentálním vyučování na základní škole jsme o dělení začali mluvit ve 3. ročníku, ale dělení nulou se neobjevilo. Ve 4. třídě se poprvé žáci ptali, kolik je $5 : 0$. Učitel je žádal, aby to promyslili. Někteří žáci tvrdili, že to bude 0, jiní že 5, ale žádný argument neuvedli. Pak dva žáci ukázali, že to není ani 0, ani 5, protože nevychází zkouška: Kdyby bylo $5 : 0 = 0$ nebo 5, pak by bylo $0 \cdot 0 = 5$ nebo $0 \cdot 5 = 5$, a to není. Mezitím někteří žáci přišli s poznatkem, že to nejde, protože to od někoho slyšeli nebo četli v nějaké učebnici. Většinu žáků ale toto tvrzení neuspokojilo. Ptali se „Ale proč to nelze?“, chtěli sémantický vhled.

   Po několika neúspěšných pokusech jsme nakonec objevili způsob, jak vnitřní rozpornost dělení nulou otevřít žákům. Trik spočíval v tom, že jsme úlohu „rozdělit spravedlivě 12 jahod mezi 0 dětí“ vložili do série dobře řešitelných úloh: „rozdělit spravedlivě 12 jahod mezi n dětí“, kde n bylo postupně 4, 3, 2 a 1. Případy 4, 3 a 2 byly bez problémů. Případ $n = 1$ vyvolal diskusi, protože „jaképak dělení, když všechno dostane jedno dítě“. Ale případ $n = 0$ byl po kratší třídní diskusi všemi prohlášen za nesmysl. Asi po měsíci jeden žák přinesl učebnici, ve které bylo v rámečku napsáno *NULOU SE NESMÍ DĚLIT*. Řekl, že by tam mělo být *DĚLENÍ NULOU JE NESMYSLNÉ*. Právě poznání nesmyslnosti této operace je poznáním příčiny onoho často opakovaného pravidla o dělení nulou.

   Otázka dělení nulou se objevila opět v 6. ročníku u zlomků. Jednalo se o zlomek $\frac{0}{0}$. Ten byl podle většiny žáků 1. Argument byl nasnadě: $\frac{a}{a} = 1$ pro všechna a, proč ne pro nulu? A navíc, kontrola vychází: $0 \cdot 1 = 0$. Toto přesvědčení vládlo ve třídě až do 7. ročníku. Až zde jeden žák objevil posloupnost, z níž vyplývalo, že $\frac{0}{0} = 2$. Byla to posloupnost rovností $\frac{10}{5} = \frac{8}{4} = \frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = \frac{0}{0}$. Žáci nebyli ochotni tuto posloupnost akceptovat. Pak se objevily další podobné posloupnosti a žáci, kterým vadila poslední rovnost $\frac{2}{1} = \frac{0}{0}$, začali hledat její jiný tvar. Nakonec souhlasili s tím, že je nutno připustit i $\frac{0}{0} = 2$, i $\frac{0}{0} = 5$, i $\frac{0}{0} = \frac{3}{2}$ apod. Pochopili, že když $\frac{0}{0}$ může být cokoli, nelze s tímto číslem pracovat.

19.10 Závěr

Úvahy o výuce záporných čísel a nuly zakončíme přímou formulací našeho přesvědčení, které jsme již dříve naznačovali, a čtveřicí základních myšlenek, které považujeme za důležité při tvorbě konkrétní koncepce výuky.

Jsme přesvědčeni, že záporné číslo i číslo nula patří na základní školu (a) jako nástroj na uchopení jistých reálných i abstraktních situací i (b) jako nástroj na porozumění těmto situacím.

1. Pojem záporné číslo nestačí budovat pomocí pravidel na zacházení se zápornými čísly. Je třeba budovat jej ve směru strukturálním i ve směru sémantickém. Jinak bude poznání trpět formalizmem.

2. Propedeutiku pojmu záporné číslo je třeba začínat již v 1. ročníku základní školy, aby bylo dost času na získání dostatečného počtu separovaných modelů schopných dovést žáka k objevu generických modelů.

3. Záporným číslům v propedeutickém období není nutno věnovat při vyučování mnoho času. Spíše je třeba ukázat žákům situace, nejlépe hry, jimiž se mohou zabývat i mimo školu. Každý měsíc by se ale měla idea záporného čísla nebo myšlenka, která tuto ideu předchází, ve vyučování objevit aspoň jednou, i když krátce; takto po celou dobu pěti let.

4. Impuls k zaměření pozornosti třídy na záporné číslo, který vzejde od žáka, je cennější než impuls od učitele.

5. Vše, co bylo řečeno o záporném čísle, platí i pro nulu. Zde je navíc žádoucí používat slovo „nula“ při popisu běžných životních situací.