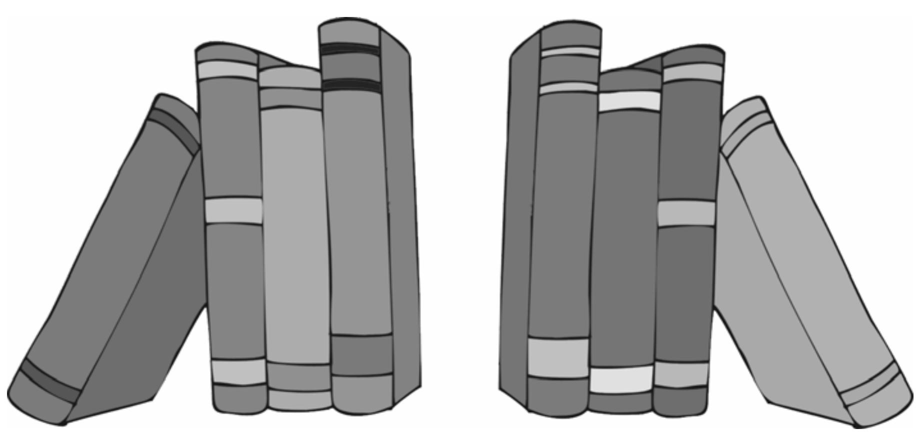
METODICKO-PEDAGOGICKÉ CENTRUM V PREŠOVE

Iveta Scholtzová

INTEGRÁCIA KOMBINATORIKY DO VYUČOVANIA MATEMATIKY NA ZÁKLADNEJ ŠKOLE

Riešené príklady s metodickými poznámkami



- 2004 -

OBSAH

ÚVOD

„Kombinatorické myšlienky môžeme postrehnúť v niektorých hádankách, aritmetických a geometrických výsledkoch vytvorených starými civilizáciami (Grécko, Čína). Avšak len v novodobej matematike sa kombinatorika objavila ako zrelá disciplína, hlavne zásluhou prác Eulera, Laplacea, Pascala a Fermata. Jej moderné základy sa preplietajú so základmi teórie grafov. V súčasnosti predstavuje kombinatorika rozvíjajúcu sa oblasť diskrétnej matematiky.“ (Preparata-Raymond, 1982, s. 288)

Súčasnosť, charakterizovaná rozsiahlou informatizáciou spoločnosti, kladie na matematiku úplne nové požiadavky. „Spojitá“ matematika, budovaná na reálnej osi a geometrických predstavách a objektoch, stráca svoje výsadné postavenie a rastie význam diskrétnej matematiky (ktorej súčasťou je kombinatorika), teórie pravdepodobnosti, štatistiky, numerickej matematiky, logiky a teórie čísel.

Jedným z hlavných cieľov všetkých tých, ktorým leží na srdci pozitívne vnímanie matematiky v spoločnosti, je skorigovanie a zatraktívnenie výučby matematiky na základných a stredných školách. To znamená realizovať štrukturálne zmeny smerom od tradičných tém školskej matematiky k iným častiam matematiky. Mohli by to byť diskrétna matematika (a v nej kombinatorika), informatika, teória pravdepodobnosti a štatistika. Atraktivita týchto oblastí je v tom, že už na elementárnej školskej úrovni možno predviesť a preukázať ich užitočnosť v aplikáciách reálneho života. (Hromkovič, 2000)

1 KOMBINATORIKA A VYUČOVANIE MATEMATIKY

Elementárne kombinatorické úlohy, v ktorých je potrebné v málopočetnej konečnej množine určiť počet vybraných objektov, usporiadať ich, vypísať a pod., nie sú, pri vhodnom metodickom prístupe zo strany učiteľa, príliš náročné. Bolo by možné zaradiť ich do školskej matematiky. Žiaci sa môžu formou hier a zaujímavých problémov oboznámiť s kombinatorickými princípmi.

Prečo je vhodné zaradiť kombinatoriku do vyučovania matematiky? V prvom rade je to atraktívnosť kombinatoriky. Mnoho problémových situácií môže byť zaujímavých pre žiakov a zároveň im poskytnúť možnosť skúmania a objavovania. Po druhé: dajú sa v nej nájsť aktivity vhodné pre výborných žiakov, ale aj také, ktoré sú primerané pre žiakov nie veľmi úspešných v matematike. Po tretie je to prístupnosť. Na pochopenie mnohých aplikácií stačí aritmetika a elementárna algebra.

Elementy kombinatoriky sa v školskej matematike objavujú už dávno. Ak sú vybrané objekty spočítavané, usporadúvané, zaradzované, zavádzame do vyučovania kombinatoriku.

Podľa Bálinta (1980) je vhodné na elementárnej úrovni postupovať pri vyučovaní kombinatoriky takto:

1. Žiaci hľadajú najprv jednu, potom niekoľko možností, napr. číslo, slovo, cestu. Takto učiteľ môže zistiť, či pochopili podmienky a vedia, čo treba hľadať.
2. Hľadajú čím viac rôznych možností riešenia úlohy.
3. Hľadajú všetky možnosti riešenia úlohy. Žiakom by malo byť jasné, že našli všetky možnosti. To je možné vtedy, ak žiaci objavia určitý poriadok v možnostiach.
4. Žiaci nemusia vidieť všetky možnosti, ale len „poriadok v nich“ a na základe toho usudzujú, aké bude pokračovanie a koľko bude riešení.
5. Nie je už potrebné, aby žiaci vymenovali všetky prípady, lebo z analýzy podmienok vedia vypočítať všetky možnosti.

Hejný (1989, s. 472) zdôrazňuje: „Kombinatorické myslenie je budované na schopnosti organizovať prvky množiny do prehľadných tabuliek, grafov, schém a zoznamov.“ Pod pojem kombinatorické myslenie zahŕňa schopnosť vytvárať abstraktný model a nájsť organizačný princíp, ťažisko kombinatorických schopností žiaka je v zručnosti hľadania organizačného princípu.

To, ako sa kombinatorika vyučuje, je veľmi dôležitá otázka. Podľa Hejného - Michalcovej (2001) je kombinatorika tým tematickým celkom, v ktorom sa procesuálny prístup výrazne líši od prístupu konceptuálneho. Pri procesuálnom prístupe sa začína náhľadom do kombinatorickej situácie a ďalej sa pokračuje jeho postupným organizovaním. Konceptuálny prístup spočíva v pochopení známych vzorcov pre jednotlivé typy kombinatorických skupín. V minulosti, keď sa kombinatorika vyučovala v nepovinnom predmete cvičenia z matematiky, resp. v triedach s rozšíreným vyučovaním matematiky, bol prístup k nej najčastejšie konceptuálny. Svedčia o tom učebnice z tohto obdobia. Boli potvrdením toho, že kombinatorika sa v písomnej forme prezentuje jednoduchšie konceptuálne ako procesuálne. Takto ponúkaná kombinatorika bola náročná na porozumenie, z čoho vyplynula všeobecná neobľúbenosť kombinatoriky u žiakov. Väčšina žiakov totiž chápe kombinatorické situácie procesuálne. Správnosť procesuálneho prístupu k vyučovaniu kombinatoriky na základnej škole potvrdzujú aj niektoré čiastočné výsledky výskumov.

Vykonali sme niekoľko pedagogických experimentov zameraných na rozvíjanie kombinatorického myslenia u žiakov základnej školy. Hlavná idea motivujúca naše výskumy bola, že kombinatorika nie je uzavretá oblasť matematiky, ktorá sa musí prezentovať iba v jednom samostatnom tematickom celku. Jej elementy sa objavujú, alebo by mohli byť zaradené do väčšiny tém školskej matematiky. Žiakom boli počas celého školského roka predkladané na riešenie kombinatorické úlohy organicky nadväzujúce na preberané tematické celky učiva matematiky. Žiaci neboli upozornení, že práve riešia kombinatorické úlohy. Z prvých analýz žiackych riešení je evidentné, že žiaci pri riešení kombinatorických úloh prirodzene uplatňujú procesuálny prístup. Analyzujú kombinatorickú situáciu a následne ju postupne organizujú. Ak žiaci správne pochopili kombinatorickú situáciu a našli vhodný organizačný princíp, boli pri riešení úspešní.

2 KOMBINATORIKA A ŽIAK

Vnímanie kombinatoriky, hlavne na stredných školách, je u mnohých žiakov také, ako to vyjadril jeden študent matematiky a fyziky: „Kombinatorika je ako športka. Nikdy neviem, či vziať vzorec na kombinácie, variácie alebo permutácie. Zvyčajne netrafím. Nemám tu pevnú pôdu pod nohami, preto kombinatoriku nemám rád.“ (Hejný, 1989, s. 472)

Tento názor získal žiak, ktorý sa s kombinatorikou stretol až na strednej škole a jej vyučovanie prebiehalo konceptuálne. Takto prezentovaná kombinatorika, ako súbor niekoľkých vzorcov, ktoré treba „navliecť“ na zadanie úlohy, určite nepovzbudí žiaka do ďalšieho štúdia.

Väčšina žiakov totiž chápe kombinatorické situácie procesuálne, a preto je tento prístup k vyučovaniu kombinatoriky pre žiakov vhodnejší.

Je veľa takých kombinatorických situácií a problémových kombinatorických úloh, ktoré zaujímajú v prvom rade malé deti; sú blízke 6 - 8-ročným, alebo aj 3 - 5-ročným deťom.

Zoznamovanie sa s kombinatorikou by mohlo začínať manipulatívnou činnosťou detí. Aké veže sa dajú postaviť z farebných kociek, aké zástavy môžu vzniknúť z farebných pásov látky, aké kytice sa dajú zložiť z rôznych druhov a farieb kvetov, koľkými spôsobmi možno obliecť bábiku, ak má niekoľko blúzok a sukní, atď.

V ďalšej fáze by si mal žiak uvedomiť potrebu organizácie práce, teda vytvorenia si systému v každej činnosti. Na to dobre poslúži kombinatorika každodenného života. Kombinovať - slovo, ktorého obsah napĺňame každý deň. Od rána až do večera všetci kombinujeme: čo na raňajky, v akom poradí sa vystriedame v kúpeľni, čo si oblečieme, ktorými spojmi mestskej dopravy sa najrýchlejšie dostaneme do školy, v akom slede vykonáme všetky školské alebo pracovné povinnosti, čo a za koľko v obchode nakúpime, čo prichystáme na večeru, aký televízny program na ktorom kanáli si pozrieme atď.

Žiak by mal pochopiť, že veľa vecí okolo nás sa deje systematicky. Ak sa naruší poriadok, na ktorý sme zvyknutí, život sa skomplikuje.

Rosenstein (1997) formuloval základné zručnosti z diskrétnej matematiky, ktoré by mal žiak ovládať v určitom veku. Pre kombinatoriku z toho vyplývajú nasledujúce skutočnosti.

Desaťročný žiak by mohol:

- vedieť vytvoriť súbor všetkých možných prípadov jednoduchých situácií (napr. aké sú možnosti obliecť sa, ak máme tri klobúky a dva kabáty);

- vedieť, že mapa ulíc môže byť prezentovaná grafom a že chodníky sú hrany v grafe;
- rozumieť, že násobenie je opakované pripočítavanie toho istého čísla;
- vidieť, že vzory na ozdobnej dlážke vznikajú opakovaným použitím malého vzoru, že rady vzorov v borovicovej šuške sú výsledkom jednoduchého matematického pravidla;
- vedieť zaradiť informácie do tabuliek, stromových grafov alebo diagramov;
- vedieť vykonať inštrukcie, ako sa dostať od jedného miesta k inému.

Pätnásťročný žiak by mal:

- ♦ vedieť systematicky vypisovať a určiť počet vybraných objektov konečnej množiny;
- ♦ vedieť určiť počet všetkých možných ciest na mape od jedného mesta k druhému;
- ♦ vedieť nájsť cenovo priaznivé cesty (najkratšie cesty) spájania sídiel do siete použitím vetviaceho stromu;
- ♦ vedieť skúmať jednoduché opakované vzory (mozaiky) a vytvárať ich;
- ♦ byť schopný čítať, konštruovať a analyzovať tabuľky, matice, mapy a iné dátové štruktúry;
- ♦ byť schopný naplánovať najvhodnejšiu cestu pre skupinový výlet;
- ♦ vedieť popísať presné inštrukcie pre sčítanie dvoch dvojciferných čísel.

Kombinatorika ponúka žiakom nové možnosti. Tradičné témy školskej matematiky - aritmetika, algebra, geometria atď. - sú, samozrejme, dôležité a je potrebné získať v nich dobré základy. Je však veľa takých žiakov, ktorých sprevádza v matematike neustály neúspech. Matematika je pre nich len súborom nepochopiteľných procedúr. Nikdy nemali možnosť skúmať procesy majúce praktický význam a aplikovateľné v životných situáciách. Druhú skupinu tvoria talentovaní žiaci, pre ktorých je školská matematika nezaujímavá a nepodstatná. Títo orientujú svoju pozornosť do iných oblastí. Kombinatorika ponúka nový štart. Žiakom, ktorí boli neúspešní v matematike, kombinatorika dáva možnosť úspechu. Žiaci sú povzbudení zaujať iný pohľad na matematiku. Zistia, že dokážu vyriešiť aj zložitejšie problémy, a nadobudnú vedomie „zmocnenia“ sa matematiky. Pre talentovaných žiakov, ktorí stratili záujem o matematiku, kombinatorika ponúka možnosti náročných úloh, ponúka problémy s otvoreným koncom, ktoré rýchle vedú k hraniciam ich znalostí.

3 KOMBINATORIKA A UČITEĽ MATEMATIKY

Väčšina súčasných učiteľov matematiky si vo svojom matematickom vzdelávaní osvojila konceptuálny spôsob vyučovania kombinatoriky. Nie je preto prekvapujúce, že aj vo svojej pedagogickej praxi „sú nastavení“ na konceptuálny spôsob výučby kombinatoriky. Táto časť matematiky bola pre mnohých možno neobľúbenou a túto svoju averziu, aj keď skrytú, môžu, častokrát nevedomky, preniesť aj na svojich žiakov.

Z dotazníkového prieskumu o vyučovaní kombinatoriky medzi učiteľmi matematiky (Scholtzová 1999, 2000) vyplynuli niektoré zaujímavé skutočnosti.

- Pre väčšinu učiteľov je kombinatorika tou časťou matematiky, s výučbou ktorej nemajú dostatočné skúsenosti (na Slovensku bola kombinatorika do učebných osnov základnej školy zaradená v roku 1997).
- Objavujú sa nedostatky v odborných vedomostiach z kombinatoriky.
- Učitelia cítia potrebu doplniť si odborné vedomosti, ale hlavne metodiku výučby kombinatoriky.
- Zaradenie kombinatoriky do učebných osnov základnej školy považujú za vhodné.
- Mnohí pedagógovia nemajú jednoznačnú predstavu o tom, čo a ako majú v kombinatorike žiakov naučiť. Z toho vyplýva, že u viacerých absentuje schopnosť stanoviť cieľ výučby. To jednoznačne poukazuje na nedostatky v metodickej príprave k tejto téme.
- Subjektívne pocity z výučby kombinatoriky sú u učiteľov viac-menej neutrálne.
- Ak je možnosť výberu medzi „klasickou“ a netradičnou učebnicou matematiky s kombinatorikou, učiteľ si v absolútnej väčšine vyberie klasickú. Neochota k zmene zaužívaných postupov je silne zakorenená.

Veľkou bolesťou vyučovania matematiky je uplatňovanie mechanického prístupu v matematickom vzdelávaní. K nemu sa niekedy uchyľujú učitelia matematiky tlačení spoločenskou objednávkou, t. j. úspešnosťou svojich žiakov na prijímacích skúškach na stredné školy, resp. vysoké školy. Snažia sa naprogramovať žiakov pomocou drilu k vykonávaniu aritmetických, algebrických a geometrických operácií pri úlohách, ktoré možno podľa istých znakov zatriediť a riešiť ich podľa naučeného vzoru. Tento prístup je ťažké alebo aj skoro nemožné uplatniť pri riešení kombinatorických úloh. „Preč“ od kombinatorických úloh „navigujú“ učiteľov matematiky aj zostavovatelia prijímacích testov z matematiky na stredné školy. Z analýzy testov (Scholtzová, 2001_1) vyplýva, že napriek tomu, že kombinatorika je na základnej škole zaradená medzi základné učivo, kombinatorické úlohy sa v testoch nachádzajú veľmi zriedka. Podobne aj úlohy z pravdepodobnosti a štatistiky, ktoré sa v prijímacích testoch nevyskytujú vôbec! Na štvorročných gymnáziách je ich počet jednoznačne nedostatočný. V testoch na osemročné gymnáziá je situácia trochu lepšia, kombinatorické úlohy sa nachádzali vo viac ako polovici analyzovaných testov.

Napriek všetkým vyššie uvedeným skutočnostiam je potešujúce, že je veľa aj takých učiteľov matematiky na základných školách, ktorí k vyučovaniu matematiky pristupujú s elánom a tvorivo. Presvedčila nás o tom spolupráca s nimi pri pedagogických experimentoch s vyučovaním kombinatoriky a na seminároch o kombinatorike, organizovaných v rámci ďalšieho vzdelávania učiteľov.

4 ELEMENTY RIEŠENIA ÚLOH Z KOMBINATORIKY

Do začiatku osemdesiatych rokov minulého storočia bola didaktika matematiky zameraná obsahovo, t. j. primárna pozornosť bola venovaná štruktúre matematickej úlohy a jej vzorovým riešeniam. Na okraji výskumu stál proces riešenia zo strany žiaka.

Našu pozornosť sme však, v duchu humanisticky orientovanej edukácie, sústredili na žiaka a jeho riešiteľský proces pri úlohách z kombinatoriky.
M. Hejný (2001) vychádzal v tejto problematike z etapizácie procesu riešenia, ktoré formuloval G. Polya v štyroch etapách (s. 96):

1. analýza zadania úlohy,
2. hľadanie plánu riešenia,
3. vlastné riešenie,
4. posúdenie (interpretácia) výsledku.

Problém etapizácie pretransformoval M. Hejný (2001) do piatich úrovní, ktorými prechádza riešiteľský proces každého riešiteľa podľa vlastného plánu. Sú to tieto (s. 97):

1. úroveň uchopenia situácie,
2. úroveň nadobudnutia vhľadu do situácie úlohy,
3. úroveň hľadania a stanovenia stratégie,
4. úroveň realizácie výpočtu,
5. úroveň interpretácie výsledku.

Tento súbor úrovní sme modifikovali a doplnili pre potreby kvalitatívnej analýzy riešení úloh z kombinatoriky. Sformulovali sme, bez nároku na úplnosť,
ELEMENTY RIEŠENIA ÚLOH Z KOMBINATORIKY:
Element č. 1: Analýza textu a nadobudnutie vhľadu do situácie úlohy
Element č. 2: Výber vhodnej metódy a stratégie riešenia
Element č. 3: Vymenovanie všetkých konfigurácií
Element č. 4: Propedeutika pre pravidlo súčinu
Element č. 5: Propedeutika pre pravidlo súčtu - umenie roztriediť
Element č. 6: Kedy sú dva objekty „rovnaké“?
Element č. 7: Grafické znázornenie
Element č. 8: Divergentné úlohy - rozvoj divergentného myslenia
Element č. 9: Usporiadanie versus neusporiadanie
Element č.10: Prvky v objektoch - najviac raz, práve raz, alebo aj viackrát?
Element č.11: Organizácia a systém

Element č.12: Interpretácia výsledku
Element č.13: Vytvorenie úlohy

Element č. 1: Analýza textu a nadobudnutie vhľadu do situácie úlohy
Sledujeme, či žiaci porozumeli textu úlohy, či chápu hlavnú myšlienku úlohy. Ak takáto situácia nastala, mali by ju v zápise riešenia nejako uviesť, prípadne graficky znázorniť. Nadobudnúť vhľad do situácie úlohy je niečo viac ako porozumieť textu úlohy. Všímame si, či žiaci dôkladne rozumeli všetkým objektom a znakom textu úlohy a tiež vzťahom medzi objektmi.

Element č. 2: Výber vhodnej metódy a stratégie riešenia
Venujeme pozornosť tej časti žiackeho riešenia, kedy nastáva rozhodovací proces o spôsobe, akým bude žiak danú úlohu riešiť. Zvýšenú pozornosť venujeme tým riešeniam, v ktorých sa v jednej úlohe vyskytuje viac ako jedna metóda, resp. stratégia riešenia. Všímame si, pre ktorú sa riešiteľ rozhodne ako pre prvú a pre ktorú až neskôr.

Element č. 3: Vymenovanie všetkých konfigurácií
Najjednoduchšia (zdanlivo) metóda na vyriešenie kombinatorickej úlohy:
1. systematicky vymenovať a popísať všetky navzájom rôzne konfigurácie vyhovujúce podmienkam úlohy;
2. takto získané konfigurácie jednoducho spočítať, t. j. očíslovať ich prirodzenými číslami od 1 do m.

Metóda je vhodná, ak je celkový počet konfigurácií malý. Je potrebné dôsledne dodržiavať dve zásady:
a) Boli vymenované všetky konfigurácie?
b) Nebola vymenovaná omylom niektorá konfigurácia viackrát?

Preto sa vyžaduje systematický postup pri vypisovaní všetkých možností a potrebná je kontrola vypísaných konfigurácií, či sa nevyskytujú rovnaké.
Táto metóda je jednoznačne najčastejšie používanou pri riešení kombinatorických úloh na 1. a 2. stupni základnej školy. Predstavuje najprirodzenejšiu cestu pre žiaka v jeho zvyčajne procesuálnom prístupe k riešeniu kombinatorickej úlohy.

Element č. 4: Propedeutika pre pravidlo súčinu
Pravidlo súčinu je jedna z kombinatorických metód, s ktorými sa žiaci oboznamujú už na základnej škole. Cesta k jeho „nájdeniu“ je opäť prirodzená, t. j. neponúkne sa žiakom vo forme pravidla - poučky, ktoré je potrebné sa naučiť. Vyplynie „evolučne“

z riešenia konkrétnych úloh. V žiackych riešeniach si všímame, či pravidlo súčinu intuitívne použijú žiaci, ktorí s ním ešte neboli oboznámení. A tiež to, ako ho používajú žiaci, ktorí by ho mali poznať - či uprednostnia túto metódu, napr. pred metódou vymenovania všetkých konfigurácií.

Element č. 5: Propedeutika pre pravidlo súčtu - umenie roztriediť

Ak je potrebné vykonať rozbor všetkých možností, najčastejšie sa to deje na základe princípu, ktorý sa nazýva pravidlo súčtu. Jeho podstata spočíva v tom, že všetky konfigurácie sa najprv roztriedia podľa určitého kritéria do navzájom disjunktných podmnožín. Pre celkový počet konfigurácií potom platí, že je súčtom počtov konfigurácií v jednotlivých disjunktných podmnožinách. Pod propedeutikou pre pravidlo súčtu rozumieme na úrovni základnej školy schopnosť roztriediť prvky danej množiny do navzájom disjunktných podmnožín vzhľadom na určité kritérium. Nemenej dôležitou otázkou je tiež schopnosť nájsť, resp. stanoviť, kritérium pre triedenie.

Element č. 6: Kedy sú dva objekty „rovnaké“?

Pedagogické skúsenosti ukazujú, že to, čo je „rovnaké“ v matematickom zmysle, nemusí byť častokrát chápané ako „rovnaké“ v bežnom živote (a naopak), a teda aj v myslení žiaka. Pri analýze žiackych riešení sústredíme pozornosť na to, ako sa tento problém prejavuje pri riešení úloh z kombinatoriky. Či riešiteľ vylučuje „rovnaké“ konfigurácie hneď pri riešení, alebo sa tak deje až vo fáze kontroly.

Element č. 7: Grafické znázornenie

Úlohy z kombinatoriky patria do tej kategórie matematických úloh, v ktorých grafické znázornenie situácie zohráva významnú úlohu v procese riešenia. V žiackych riešeniach si všímame, nakoľko žiaci používajú grafické znázornenie, v akej fáze riešenia ho používajú, či je pre nich východiskovým bodom riešenia, doplňujúcim faktorom alebo len ilustráciou.

Element č. 8: Divergentné úlohy - rozvoj divergentného myslenia

Podľa M. Cirjaka (2000) poznávacie procesy môžeme rozdeliť na konvergentné a divergentné. Pri konvergentných myšlienkových procesoch sa z daných predpokladov smeruje k jedinému správnemu záveru. Divergentné myšlienkové procesy sú také, kde myslenie je zamerané do šírky, diverguje, t. j. produkuje rozličné nápady, alternatívy, hypotézy. Každé divergentné myslenie je tvorivé. Z hľadiska psychických procesov žiaka riešenie divergentných úloh vyžaduje:

- hľadanie, skúmanie, objavovanie, t. j. aktívnu poznávaciu činnosť;

- schopnosť pretvárať osvojenú skúsenosť;
- vytváranie nových stratégií a metód riešenia;
- invenciu subjektu, uplatnenie tvorivých myšlienkových schopností.

Aj niektoré kombinatorické úlohy môžu mať divergentný charakter. Pri ich analýze pozorujeme, ako žiaci pristupujú k ich riešeniu a aké výsledky dosahujú.

Element č. 9: Usporiadané versus neusporiadané konfigurácie

V priebehu dlhoročnej pedagogickej praxe sme nadobudli skúsenosť, že pre žiakov sú jednoduchšie tie úlohy, v ktorých je potrebné vytvárať usporiadané konfigurácie, ako tie, v ktorých sú konfigurácie neusporiadané. Je preto pravdepodobné, že pomoc zo strany učiteľa pri procese riešenia kombinatorickej úlohy bude potrebná pri tých úlohách, v ktorých je pre žiaka zložitejšie rozhodnúť sa, či je potrebné vytvárať usporiadané možnosti alebo neusporiadané možnosti.

Element č. 10: Prvky v objektoch - najviac raz, práve raz, alebo aj viackrát?

Opäť z pedagogickej praxe máme skúsenosť, že pre žiakov býva často komplikovaným problémom, koľkokrát sa jednotlivé prvky môžu, resp. musia začleniť do vytváraných konfigurácií. Všímame si, ako žiaci analyzujú kombinatorickú úlohu v tomto kontexte.

Element č. 11: Organizácia a systém

Tak ako v celej matematike, aj pri riešení úloh z kombinatoriky je dôležité nájsť organizačný princíp, prostredníctvom ktorého sa nájde a usporiada daná množina. Nájdenie alebo nenájdenie organizačného princípu a vytvorenie si systému v riešení je, vo väčšine prípadov, rozhodujúce pre úspešnosť riešenia úlohy.
Ako sa žiakom darí, resp. nedarí, objaviť v jednotlivých úlohách organizačný princíp, to si všímame pri analýze ich riešení.

Element č. 12: Interpretácia výsledku

Zo skúseností vieme, že žiak často vypočíta matematickú úlohu, podčiarkne výsledok, ale nevie odpovedať na otázku, čo to vlastne vypočítal. Všímame si, ako sa v žiackych riešeniach objavuje interpretácia výsledku. Snažíme sa analyzovať, či prípadná absencia interpretácie výsledku je spôsobená žiakovou nepozornosťou (prípadne „nepotrebou“ interpretovať výsledok), alebo je to nedostatok vhľadu do situácie, čo poukazuje na prítomnosť formalizmu v matematickom poznaní žiaka.

Element č. 13: Vytvorenie úlohy

V priebehu vyučovania matematiky sa žiakovi, v drvivej väčšine prípadov, predkladajú na riešenie úlohy, ktoré vytvoril niekto iný a žiak ich má vyriešiť. Táto skutočnosť môže byť pre neho značne demotivujúca. Len málokedy má žiak možnosť sám vytvoriť úlohu. Proces tvorby matematickej úlohy mu teda zostáva utajený. Aspoň čiastočne sme sa pokúsili ponúknuť žiakom aj také podklady, aby sami zostavili jednoduché úlohy, pri tvorbe ktorých by uplatnili kombinatorický prístup. M. Zelina (1990) na základe kombinácie možností podielu tvorivosti obsahu a potencionality úloh, vzhľadom na otvorenosť a uzavretosť procesov a ich výsledkov, vytvoril taxonómiu tvorivých úloh v matematike. Definoval štyri stupne tvorivosti. Ak žiak vytvára úlohu sám, ide teda o relatívnu otvorenosť pri zadaní úlohy, variabilitu pri použitých procesoch riešenia a otvorenosť výstupov, potom takýto proces zodpovedá tvorivosti tretieho alebo aj štvrtého stupňa. Takéto úlohy, aj z kombinatoriky, by žiak mohol vo svojom matematickom vzdelávaní stretnúť a riešiť ich.

5 KOMBINATORICKÉ ÚLOHY V INÝCH TÉMACH - NIE LEN V KOMBINATORIKE

Všetky uvedené príklady je možné použiť v tematickom celku *kombinatorika.* Je však možné integrovať ich do vyučovacieho procesu aj pri iných témach. Návrhy na zaradenie sú uvedené v zátvorke za označením príkladu.

PRÍKLAD 1: (prirodzené čísla)

Vytvorte všetky trojciferné čísla z číslic 1, 2, 7, 0.

Riešenie s metodickými poznámkami:

Klasická kombinatorická úloha. Ak žiak nadobudne správny vhľad do situácie, mal by si uvedomiť niekoľko skutočností:

- Trojciferné číslo nemôže mať na mieste stoviek nulu.
- Poradie číslic v čísle je dôležité.
- Zadanie nešpecifikuje, koľkokrát sa jednotlivé číslice môžu vyskytovať vo vytváranom čísle, môžeme teda vytvárať konfigurácie s opakovaním prvkov aj bez opakovania prvkov.

Riešenie môžeme vytvoriť vypisovaním všetkých možností, pričom si ich môžeme roztriediť do skupín (propedeutika pre pravidlo súčtu). Napr.

100	110	120	170	200	210
101	111	121	171	201	211
102	112	122	172	202	212
107	117	127	177	207	217
220	270	700	710	720	770
221	271	701	711	721	771
222	272	702	712	722	772
227	277	707	717	727	777

Pri riešení tejto úlohy je vhodné použiť skupinovú formu výučby s prvkami súťaže - ktorá skupina nájde najviac správnych riešení. Je pravdepodobné, že najviac riešení nájdu tí, ktorí budú pri riešení postupovať systematicky. Túto skutočnosť je vhodné zdôrazniť a takýto postup pri riešení pozitívne ohodnotiť. Dôležitý je tiež faktor kontroly, t. z. upriamiť pozornosť žiakov na to, že systematické riešenie umožňuje lepšiu kontrolu, či sme vypísali všetky konfigurácie. Navrhujeme, aby aplikácia kombinatorického pravidla súčinu bola žiakom „odhalená“ až vtedy, keď majú dobre osvojený systém vypisovania všetkých možností. Ideálne by bolo, ak by žiaci sami našli odpoveď na otázku, či by dokázali povedať počet všetkých hľadaných čísel bez ich vypísania. Takáto úloha by mohla byť jedným z vrcholov pyramídy úloh tohto typu, v ktorej by boli úlohy stupňujúcej sa náročnosti na vytváranie dvoj, trojciferných čísel; bez použitia nuly aj s nulou; bez opakovania číslic aj s opakovaním a pod.

PRÍKLAD 2: (prirodzené čísla)

Kniha má 100 strán a všetky sú očíslované. Koľkokrát je použitá číslica 1 pri číslovaní strán?

Riešenie s metodickými poznámkami:

Najprirodzenejšou cestou pre riešenie je vypísanie všetkých tých čísel od 1 do 100, v ktorých sa vyskytuje číslica 1, a následné spočítanie, koľkokrát sa tam nachádza. Teda:

1, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91, 100.

Číslica 1 bola použitá pri číslovaní strán 21-krát. Najčastejšou chybou, ktorej sa žiaci dopúšťajú, je, že zabudnú započítať dve jednotky čísla 11. Túto chybu by sme mohli zaradiť do kategórie chýb z nepozornosti. Z hľadiska kombinatoriky je podstatné, či žiaci dokážu vytvoriť všetky konfigurácie, v ktorých sa vyskytuje cifra 1.

PRÍKLAD 3: (prirodzené čísla)

Z dvoch trojok a štyroch núl napíš všetky šesťciferné čísla. Usporiadaj čísla od najväčšieho po najmenšie.

Riešenie s metodickými poznámkami:

330 000, 303 000, 300 300, 300 030, 300 003

Takto vyzerá riešenie v ideálnom prípade. Nesprávny vhľad do situácie úlohy môže spôsobiť, že žiak vytvorí „šesťciferné“ číslo s nulou na mieste stotisícok. Často bývajú vytvorené požadované čísla a až následne ich riešiteľ usporiada podľa požiadaviek zadania. Nie je to chyba, poukazuje to však na problém riešiť úlohu komplexne, t. j. súčasne vnímať viacero podmienok.

PRÍKLAD 4: (prirodzené čísla)

Z číslic 0, 1, 3, 4, 6, 7, 9 utvorte všetky trojciferné čísla, ktoré majú ciferný súčet 10. (Číslice v číslach sa neopakujú.)

Riešenie s metodickými poznámkami:

Pri riešení je potrebné vnímať tri podmienky zadania:

- Vytvárame trojciferné číslo, t. j. na mieste stoviek nemôže byť nula.
- Každá z daných číslic sa vo vytváranom čísle môže použiť najviac jedenkrát.
- Ciferný súčet vzniknutého čísla má byť 10.

Vyhovujú čísla: 109, 136, 163, 190
307, 316, 361, 370
406, 460
604, 613, 631, 640
703, 730
901, 910

Je pravdepodobné, že ak vytváranie požadovaných čísel nebude systematické, riešitelia ťažko nájdu všetky vyhovujúce konfigurácie. Opäť vhodné na skupinovú formu výučby - využitie faktora súťaživosti. Zadanie možno obmeniť vynechaním podmienky o neopakovaní cifier.

PRÍKLAD 5: (prirodzené čísla)

*Ktoré číslice môžeme doplniť namiesto * do čísla 1**1, aby malo taký istý ciferný súčet ako číslo 4570? Vypíšte všetky možnosti.*

Riešenie s metodickými poznámkami:

Riešenie môžeme formulovať v niekoľkých krokoch:

1. určiť ciferný súčet čísla 4570 $\rightarrow$ 16;
2. zistiť, aká dvojica čísel dáva súčet o dva menší ako 16, t. j. 14 $\rightarrow$ 5 - 9, 6 - 8, 7 - 7;
3. vytvoriť všetky usporiadané dvojice $\rightarrow$ 59, 95, 68, 86, 77;
4. vypísať všetky možnosti $\rightarrow$ 1591, 1951, 1681, 1861, 1771.

Tento postup riešenia a jeho jednotlivé fázy je vhodné uvedomiť si hlavne preto, aby sme pri analýze žiackych riešení mohli správne diagnostikovať, v ktorej fáze mohlo dôjsť k chybe v riešení.

PRÍKLAD 6: (celé čísla)

Zapíš, a ak vieš, tak vypočítaj, všetky súčty, rozdiely, súčiny a podiely z čísel -2 a 4 (-3 a 6).

Riešenie s metodickými poznámkami:

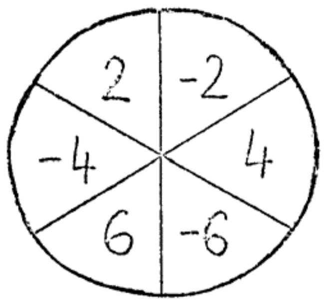
$-2 + 4 = 4 + (-2) = 2$	$-2 \cdot 4 = 4 \cdot (-2) = -8$
$-2 - 4 = -6$	$-2 : 4 = -0{,}5$
$4 - (-2) = 6$	$4 : (-2) = -2$

Najčastejšou chybou, ktorej sa môžu žiaci dopustiť, asi bude, že vytvoria súčet, rozdiel, súčin a podiel z dvoch čísel len v tom poradí, ako sú čísla uvedené v zadaní. Neuvedomia si, že to, čo vyhovuje pri operácii sčítania a násobenia, ktoré sú v množine celých čísel komutatívne, neplatí pre operácie odčítania a delenia, ktoré komutatívne nie sú. Teda raz je poradie prvkov vo vytváraných konfiguráciách nepodstatné, ale inokedy áno.

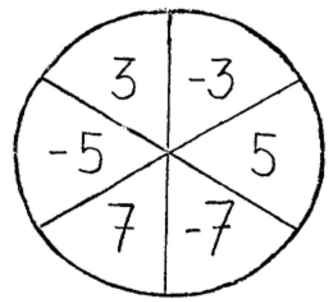
PRÍKLAD 7: (celé čísla)

Koľkými spôsobmi možno nahrať: a) 4 body, b) 5 bodov s tromi šípkami na tomto nezvyklom terči? Každá šípka musí skončiť v niektorom výseku (v jednom smie skončiť aj viac šípok) a všetky musia bodovať. Na poradí zásahov nezáleží.

a)



b)



Riešenie s metodickými poznámkami:

Podstatné je uvedomiť si poslednú podmienku, že nie je dôležité, v akom poradí jednotlivé prvky vstúpia do súčtov. Správne riešenia po a):

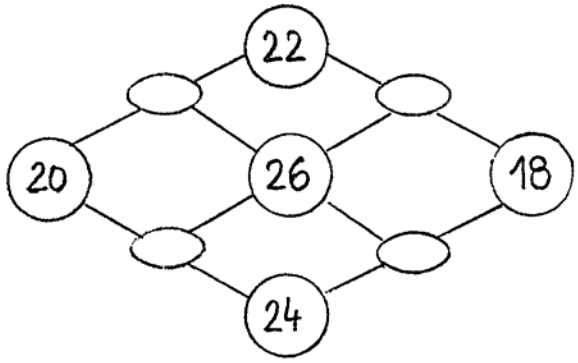
6 + 4 + (-6) = 4	4 + 4 + (-4) = 4
6 + 2 + (-4) = 4	4 + 2 + (-2) = 4

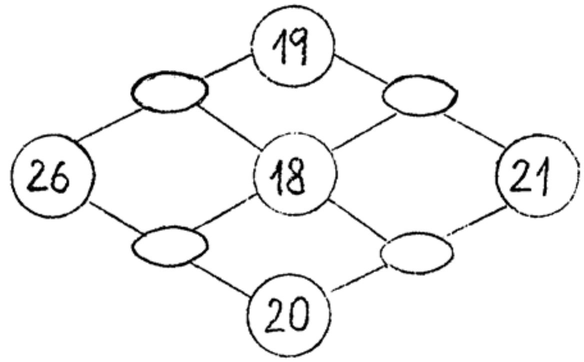
V žiackych riešeniach sa pravdepodobne objavia konfigurácie dávajúce súčet 4, v ktorých budú rovnaké cifry, len zapísané v inom poradí. To poukazuje na skutočnosť, že žiaci nedokonale rozlišujú, ktoré konfigurácie sú v zmysle zadania rovnaké a ktoré sú rôzne. Zadanie môže byť v ďalšom kroku náročnejšie, ak pripustíme, že nie každá šípka musí bodovať, t. j. skončiť v niektorom z výsekov.

PRÍKLAD 8: (celé čísla)

Začni kruhom celkom naľavo a postupuj len doprava po čiarach až do kruhu celkom napravo a sčítavaj pritom čísla a prázdne ovály, cez ktoré ideš. Každý ovál má hodnotu: a) -13, b) -15. Aká je najmenšia a najväčšia hodnota, ktorú možno dostať? Koľko rôznych „ciest“ si absolvoval?

a) *b)*





Riešenie s metodickými poznámkami:

Kombinatorická úloha, ktorá propedeuticky smeruje aj do teórie grafov. V správnom riešení je 6 rôznych ciest.

a): 20 + (-13) + 22 + (-13) + 18 = 34
20 + (-13) + 26 + (-13) + 18 = 38 (4 rôzne cesty)
20 + (-13) + 24 + (-13) + 18 = 36

Ak sa žiakom nedarí nájsť všetky rôzne cesty, ako vhodný postup navrhujeme najprv odlišnými farbami vyznačiť jednotlivé cesty (postup po hranách grafu). Dôležité je uvedomiť si skutočnosť, že takmer v každom (okrem 22 a 24) kruhu, resp. ovále (vrchol grafu), nastáva rozhodovací proces, ktorou cestou (hranou grafu) pokračovať ďalej. Opäť je vhodné žiakom pripomenúť, že systematický postup pri riešení zvyšuje pravdepodobnosť úspešného vyriešenia úlohy.

PRÍKLAD 9: (zlomky)

Z číslic 0, 2, 5 (0, 3, 7) vytvorte všetky zlomky, ktoré dokážete. Zistite, či sú medzi vytvorenými zlomkami také, ktoré sa rovnajú. Ak áno, vytvorené zlomky roztrieďte do skupín podľa veľkosti.

Riešenie s metodickými poznámkami:

Je pravdepodobné, že väčšina žiakov bude vytvárať zlomky s jednociferným číslom v čitateli aj v menovateli, pričom každú číslicu použijú najviac raz: $\frac{0}{2}, \frac{0}{5}, \frac{2}{5}, \frac{5}{2}$.

Niektorí možno použijú tú istú cifru v zlomku aj dvakrát a potom ich riešenie bude vyzerať takto: $\frac{0}{2}, \frac{0}{5}, \frac{2}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{2}, \frac{5}{5}$.

A snáď sa nájdu aj takí, ktorí majú rozvinuté divergentné myslenie, sú maximálne tvoriví a nekonvenční. Tí môžu vytvoriť v podstate neobmedzený počet rôznorodých zlomkov a tiež zmiešaných čísel.

Samozrejme, v ktoromkoľvek z vyššie uvedených prípadov si môžeme overiť, či majú žiaci dobre upevnený poznatok o tom, kedy má zlomok zmysel. Triedenie zlomkov do skupín podľa veľkosti ukáže, ako žiaci ovládajú rovnosť zlomkov.

PRÍKLAD 10: (zlomky, desatinné čísla)

Napíš čo najviac zlomkov s menovateľom 3, ktoré sú väčšie ako 2 a menšie ako 3, 6.

Riešenie s metodickými poznámkami:

V tejto úlohe možno vniesť prvky kombinatorického myslenia (pri vytváraní zlomkov) do vzťahu medzi zlomkami a desatinnými číslami. Ak je prepojenie správne, žiacke riešenie by malo byť: $\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{9}{3,}, \frac{10}{3}$.

PRÍKLAD 11: (zlomky)

Sú dané zlomky $\frac{3}{4}$ a $-\frac{5}{2}$. Vytvorte všetky súčty, rozdiely, súčiny a podiely z týchto dvoch zlomkov.

Riešenie s metodickými poznámkami:

Žiaci by mali vytvoriť a následne vypočítať takéto úlohy:

$$\frac{3}{4}+\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{7}{4} \qquad \frac{3}{4}-\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{13}{4} \qquad \frac{3}{4}:\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{3}{10}$$

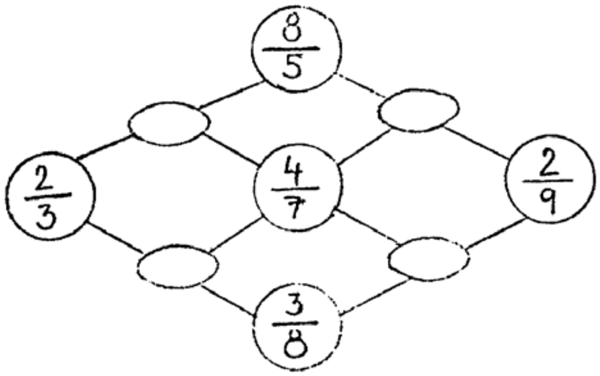
$$\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{15}{8} \qquad -\frac{5}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{13}{4} \qquad -\frac{5}{2}:\frac{3}{4}=-\frac{10}{3}$$

Žiaci by si mohli uvedomiť, že môžeme vytvoriť jednu úlohu na sčítanie a jednu úlohu na násobenie zlomkov (vzhľadom na komutatívnosť daných operácií v množine racionálnych čísel), ale dve úlohy na odčítanie a dve úlohy na delenie zlomkov. Pravdepodobne najčastejšou chybou bude, že ak v prípade odčítania na mieste menšiteľa bude záporné číslo, žiaci zapíšu znamienko mínus len raz, a teda odčítajú opačné číslo, ako bolo v zadaní. Na nedostatky v kombinatorickom myslení poukáže také žiacke riešenie, v ktorom sa objaví po jednom súčte, súčine, rozdiele a podiele v tom poradí, ako boli zlomky zadané. Žiak si zrejme neuvedomí, že zámena poradia zlomkov vedie pri odčítaní a delení k inému výsledku.

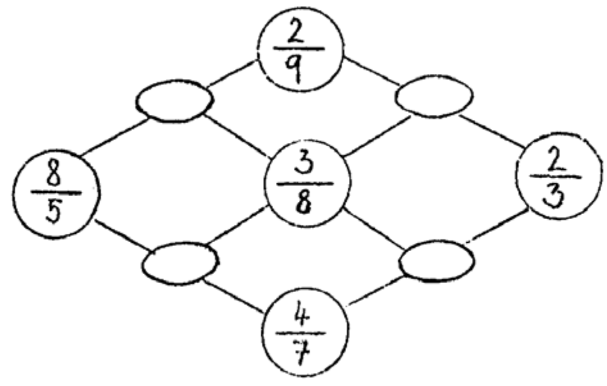
PRÍKLAD 12: (zlomky)

Začni kruhom celkom naľavo a postupuj len doprava po čiarach až do kruhu celkom napravo a sčítavaj pritom zlomky a prázdne ovály, cez ktoré ideš. Každý ovál *má hodnotu a) $-\frac{3}{5}$, b) $-\frac{2}{5}$. Aká je najmenšia a najväčšia hodnota, ktorú možno dostať? Koľko rôznych „ciest“ si absolvoval?*

a)



b)



Riešenie s metodickými poznámkami:
Postupujeme analogicky ako v *Príklade 8.*

PRÍKLAD 13: (desatinné čísla)

Máme k dispozícii tri desatinné čísla: 2,34; 5,7; 13,56 a štyri znamienka: +, -, ., :. Vytvorte rôzne úlohy, v ktorých použijete dané desatinné čísla a dané znamienka (každé číslo a každé znamienko môžete v jednej úlohe použiť najviac raz). Vypočítajte.

Riešenie s metodickými poznámkami:
Divergentná úloha, t. j. môže vzniknúť veľký počet rôznorodých zadaní. Úloha je opäť vhodná na skupinovú formu výučby; ktorá skupina vytvorí viac zadaní a následne ich správne vypočíta. „Prémiové body“ by mohli byť udelené za rôznorodosť vytvorených úloh: zadanie z dvoch alebo z troch čísel, použitie záporného čísla na prvom mieste v zadaní a pod. Zadanie príkladu je možné variovať: menší, resp. väčší počet čísel, menší počet znamienok, k dispozícii aj zátvorky, možnosť použiť čísla a znamienka aj viackrát atď.

PRÍKLAD 14*:* (výrazy)

Môžeš použiť jednočleny: -9a, 6b, -3; dvojčleny: 18b – 12a, -15a + 9; symboly: +, -, ., :, ( ). Vytvor z nich čo najviac rôznych výrazov. Ak vieš, uprav ich (napr. sčítaj, odčítaj, vynásob, vydeľ, vyber pred zátvorku).

Riešenie s metodickými poznámkami:
Opäť divergentná úloha, pri ktorej sa rozvíja vyšší stupeň tvorivosti u žiakov. Vhodná na skupinovú formu výučby. Žiaci sa zvyknú dopustiť niektorých chýb: nerešpektujú dvojčlen pri jeho vstupe do vytváraného výrazu; nerešpektujú znamienko (–) u jednočlena, ak vstupuje do výrazu. Pozitívne je vhodné ohodnotiť také žiacke riešenia, v ktorých sú použité všetky výrazy a všetky symboly (nie nutne v každej úlohe), pričom je rešpektovaný typ východiskového výrazu. Je pravdepodobné, že najviac výrazov bude vytvorených tam, kde bude snaha o systematické vytváranie nových výrazov.

PRÍKLAD 15: (deliteľnosť prirodzených čísel)

Je dané číslo 407. Zameňte poradie číslic tak, aby nové číslo bolo deliteľné: a) dvoma, b) piatimi.

Riešenie s metodickými poznámkami:
Žiacke riešenia pravdepodobne ukážu, že väčšina žiakov ovláda znaky deliteľnosti a dostane výsledok: a) 470, 704, 740; b) 470, 740. U niektorých sa môže objaviť overovanie správnosti delením. To poukazuje na nedostatočnú utvrdenosť poznatkov. Častokrát sa objavujú v žiackych riešeniach nesprávne zápisy typu: 407 = 704 : 2 = 352.

PRÍKLAD 16: (deliteľnosť prirodzených čísel)

Nájdite všetky navzájom rôzne číslice X, Y tak, aby vzniknuté štvorciferné číslo XYYX bolo deliteľné tromi a piatimi súčasne.

Riešenie s metodickými poznámkami:
Ak má byť číslo deliteľné piatimi, na mieste jednotiek musí byť číslica 0 alebo 5. Aby to bolo štvorciferné číslo, musí mať tvar 5XX5. Navyše, ak má byť deliteľné tromi, jeho ciferný súčet musí byť deliteľný tromi, a teda hľadané čísla sú: 5115, 5445, 5775. Nie všetkým žiakom sa zvyčajne podarí nájsť všetky možnosti, najčastejšie nájdu číslo 5115. U niektorých sa môžu objaviť aj „čísla“: 0330, 0660, 0990. To poukáže na nedostatočný vhľad do situácie úlohy (Čo je štvorciferné číslo?). Dá sa očakávať, že mnohí riešitelia budú robiť skúšku delením, čo poukáže na to, že poznatky o deliteľnosti nie sú dostatočne utvrdené.

PRÍKLAD 17: (percentá)

Otec mal troch synov: Petra, Martina a Vlada. Rozhodol sa, že najväčšiu časť z dedičstva získa najšikovnejší z nich. Vymyslel pre nich takúto úlohu: Hodnota dedičstva je 70 000 Sk. Percentuálne vyjadrenie rozdelenia je 25 %, 35 %, 40 %. Kto *chce získať najvyššiu sumu, musí nájsť všetky možnosti, ako môžu byť peniaze synom rozdelené. Dokážeš to zistiť aj ty?*

Riešenie s metodickými poznámkami:

Veľmi netradičné spojenie, percentá s prvkami kombinatoriky. Prvý krok v riešení vyžaduje vypočítať, aké sumy zodpovedajú 25 %, 35 % a 45 % z čiastky 70 000 Sk. Dostávame: 17 500 Sk, 24 500 Sk, 28 000 Sk. Táto časť riešenia bola o percentách. Teraz nastupuje kombinatorika a s ňou možné spôsoby rozdelenia dedičstva.

	Peter	**Martin**	**Vlado**
1.	17 500 Sk	24 500 Sk	28 000 Sk
2.	17 500 Sk	28 000 Sk	24 500 Sk
3.	24 500 Sk	28 000 Sk	17 500 Sk
4.	24 500 Sk	17 500 Sk	28 500 Sk
5.	28 000 Sk	24 500 Sk	17 500 Sk
6.	28 000 Sk	17 500 Sk	24 500 Sk

Existuje teda šesť rôznych možností, ako môže byť rozdelené dedičstvo.

PRÍKLAD 18: (uhol)

Sú dané veľkosti uhlov: 23°, 176°, 37°, 49°, 152°, 89°,112°, 90°, 147°. *Rozdeľte ich do skupín tak, aby v jednej skupine boli uhly ostré, v druhej pravé a v tretej skupine uhly tupé.*

Riešenie s metodickými poznámkami:

Kombinatorika sa zaoberá aj otázkami triedenia do navzájom disjunktných množín. V tomto prípade ide o trichotomické triedenie:

Ostré uhly: 23°, 37°, 49°, 89°

Pravé uhly: 90°

Tupé uhly: 176°, 152°, 112°, 147°

Pokiaľ žiaci ovládajú klasifikáciu uhlov podľa veľkosti, táto úloha bude pre nich jednoduchá.

PRÍKLAD 19: (trojuholník, obvod rovinných útvarov)

Dĺžky strán rovnoramenného trojuholníka sú vyjadrené celými číslami. Jeho obvod je 21 cm. Určte dĺžky strán všetkých rovnoramenných trojuholníkov, ktoré vyhovujú daným podmienkam. Odôvodnite svoj postup riešenia.

Riešenie s metodickými poznámkami:
Pri riešení je potrebné uvedomiť si niekoľko podmienok, vyplývajúcich zo zadania:

1. V každom trojuholníku platí trojuholníková nerovnosť - súčet veľkostí ľubovoľných dvoch strán musí byť väčší ako veľkosť tretej strany. (Táto podmienka ale nie je vyslovená v zadaní, pretože sa predpokladá jej zvládnutie na 1. stupni ZŠ.)
2. V rovnoramennom trojuholníku sú veľkosti aspoň dvoch strán rovnaké.
3. Pre obvod trojuholníka platí: $o = a + b + c$.

Potom dostávame riešenia:

6, 6, 9	7, 7, 7	8, 8, 5	9, 9, 3	10, 10, 1

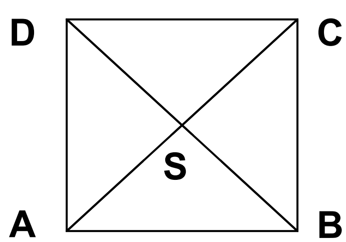
Najčastejšie chyby, ktoré sa môžu objaviť v žiackych riešeniach:

- Žiaci rovnostranný trojuholník nepovažujú za rovnoramenný, a preto nezaradia, alebo dokonca vyškrtnú možnosť 7,7,7.
- Nerešpektujú trojuholníkovú nerovnosť.
- Z pohľadu kombinatoriky je chybou, že považujú zhodné trojuholníky za rôzne, uvedú napr. 5, 8, 8 a tiež 8, 5, 8. (Je vhodné takéto trojuholníky graficky znázorniť, uplatniť vizualizáciu danej situácie.)
- Príčinou slabšej úspešnosti môže byť aj absencia systematického postupu pri riešení.

PRÍKLAD 20: (trojuholník, štvoruholník)

Narysujte štvorec ABCD. Narysujte úsečky AC, BD a ich stred označte S. Zapíšte všetky rovnoramenné trojuholníky, ktoré na obrázku vidíte.

Riešenie s metodickými poznámkami:



Rovnoramenné trojuholníky:
ASB, BSC, CSD,ASD;
ABC, BCD, CDA, DAB.

V tejto geometrickej úlohe môžeme tiež pozorovať elementy kombinatoriky. Ak sú žiacke vedomosti o štvorci a jeho uhlopriečkach, ktoré sa rozpoľujú, dostatočné, mali by úlohu zvládnuť bez väčších problémov. Z hľadiska kombinatoriky je dôležité sledovať, či žiaci správne rozlišujú, čo je rovnaké a čo je rôzne. V tomto príklade to znamená, či nepovažujú za rôzne dva trojuholníky s tými istými vrcholmi, ktoré sú zapísané v inom poradí, napr. trojuholník *ASB* a trojuholník *ABS*.

PRÍKLAD 21: (trojuholník, obvod rovinných útvarov)

Máme zostrojiť trojuholník. Jeho obvod je 24 cm a veľkosti strán sú celé čísla. Koľko rôznych trojuholníkov môžeme zostrojiť? Nájdite všetky možnosti. Odôvodnite svoj postup riešenia.

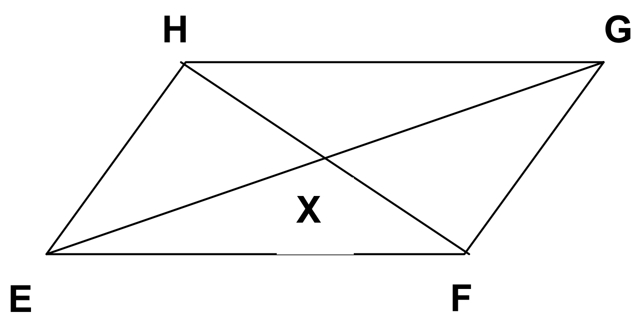
Riešenie s metodickými poznámkami:

Postupujeme analogicky ako v *Príklade 19*. Hľadané trojuholníky ale nemusia byť rovnoramenné, a preto veľkosti ich strán môže reprezentovať aj trojica navzájom rôznych čísel. Dá sa preto očakávať, že ešte pravdepodobnejšie sa objaví chyba, kedy zhodné trojuholníky budú považované za rôzne.

PRÍKLAD 22: (trojuholník, štvoruholník, zhodnosť rovinných útvarov)

Zostrojte kosodĺžnik EFGH a jeho uhlopriečky EG, FH. Priesečník uhlopriečok označte X. Nájdite a zapíšte všetky dvojice zhodných trojuholníkov. Svoje tvrdenie odôvodnite.

Riešenie s metodickými poznámkami:



Ak sú poznatky žiakov o rovnobežníkoch a zhodných geometrických útvaroch v rovine dostatočné, mali by dospieť k takýmto zhodným trojuholníkom:

$\Delta EFX \cong \Delta GHX$ $\Delta EFG \cong \Delta EHG$

$\Delta EHX \cong \Delta FGX$ $\Delta FGH \cong \Delta EFG$

V odôvodnení by sa mohli objaviť tieto skutočnosti:

- Uhlopriečky rozdeľujú kosodĺžnik na dvojice zhodných trojuholníkov.
- Trojuholníky majú rovnaké veľkosti strán a veľkosti vnútorných uhlov.
- Trojuholníky sú zhodné podľa niektorej z viet o zhodnosti trojuholníkov.

Z hľadiska kombinatoriky je opäť dôležité, či je v predstave žiakov trojuholník *EFG* to isté ako trojuholník *FGE*.

PRÍKLAD 23: (štvoruholník, obvod a obsah rovinných útvarov)

Obdĺžnik má obsah 30 cm^2. Aké môžu byť dĺžky jeho strán, ak sú vyjadrené celými číslami? Zapíšte všetky možnosti a vypočítajte obvody jednotlivých obdĺžnikov.

Riešenie s metodickými poznámkami:

Riešením sú obdĺžniky s veľkosťami strán:

1 - 30 2 - 15 3 - 10 5 - 6

Toto, predpokladáme, vyriešia žiaci bez problémov, ak vedia vypočítať obsah obdĺžnika. Následne môžu vypočítať obvody jednotlivých obdĺžnikov:

o_1 = 62 cm o_2 = 34 cm o_3 = 26 cm o_4 = 22 cm

Pripomíname, že z hľadiska kombinatoriky je obdĺžnik s veľkosťami strán 5 cm a 6 cm to isté, ako obdĺžnik s veľkosťami strán 6 cm a 5 cm. (Je vhodné vizualizovať danú situáciu.)

PRÍKLAD 24: (obsah rovinných útvarov)

Chceme vysadiť kvetinový záhon s výmerou a) 90 m^2, b) 100 m^2. Ty si záhradný architekt a máš navrhnúť jeho tvar. Skús načrtnúť, ako by mohol kvetinový záhon vyzerať, nezabudni na jeho výmeru. Do obrázka vpíš rozmery. Vymysli čo najviac vhodných návrhov.

Riešenie s metodickými poznámkami:

Geometrická divergentná úloha s elementami kombinatoriky. Podľa nášho názoru, je možné zaradiť ju do kategórie úloh na tvorivosť tretieho stupňa, typ RP - OP - OP (uzavreté zadanie úlohy - otvorený proces - otvorený produkt).

Poznámka:

Pri analýze štruktúry matematických úloh môžeme vyčleniť tri základné komponenty matematickej úlohy:

a) **spôsob zadania úlohy** - otvorenosť, resp. uzavretosť, problému;
b) **spôsob riešenia problému** - konvergentnosť, resp. divergentnosť, procesov riešenia;
c) **výsledok úlohy** - otvorenosť, resp. uzavretosť, produktu činnosti.

M. Zelina (1990), podľa kombinácie uvedených možností podielu tvorivosti obsahu a potencionality úloh, vzhľadom na otvorenosť a uzavretosť procesov a ich výsledkov, odporúča takúto taxonómiu tvorivých úloh:

I. Tvorivosť najnižšieho stupňa. Prejavuje sa v úlohách typu:

1. **RP – RP – RP**

   Relatívne uzavreté a rutinné postupy pri zadaní úlohy, aj pri použitých postupoch riešenia, ktoré sú mechanické, algoritmicky dané a smerujú k jedinému správnemu výsledku.

II. Tvorivosť druhého stupňa. Prejavuje sa v úlohách typu:

2. **RP – RP – OP**
3. **RP – OP – RP**
4. **OP – RP – RP**

Jedna z oblastí je otvorená pre divergentné produkcie. Ostatné dve sú relatívne uzavreté a predpokladajú aplikácie známych reprodukcií.

III. Tvorivosť tretieho stupňa. Prejavuje sa v úlohách typu:

5. **RP – OP – OP**
6. **OP – RP – OP**
7. **OP – OP – RP**

Jeden komponent úlohy je uzavretý pre použitie neštandardných, nealgoritmických, nerutinných postupov. Dva komponenty sú otvorené pre možnosť divergentného myslenia a variabilných postupov.

IV. Tvorivosť štvrtého stupňa. Prejavuje sa v úlohách typu:

8. **OP – OP – OP**

Otvorenosť pri definovaní problémov, variabilita pri použití procesov riešenia a otvorenosť na strane výsledkov. (Cirjak, 2000)

Pri riešení je potrebné skĺbiť teoretické vedomosti o obsahoch rovinných útvarov, rovinnú predstavivosť, divergentné a kombinatorické myslenie. Žiaci pravdepodobne znázornia veľký počet rôznorodých rovinných útvarov. Okrem tradičných obdĺžnikov s rôznymi rozmermi to môžu byť rovnoramenné trojuholníky, lichobežníky a rovnobežníky. Ďalej zložené útvary z obdĺžnikov, štvorcov, trojuholníkov. Dokonca by sa mohol objaviť aj pravidelný mnohouholník. Dôležitým krokom v niektorých riešeniach môže byť sebakontrola. Ak je vytvorený útvar zložitejší, a teda jeho obsah nie je zrejmý na prvý pohľad, žiaci pravdepodobne urobia kontrolu svojho návrhu dôsledným výpočtom obsahu daného útvaru. Tento krok v žiackom riešení je veľmi cenný a hodný ocenenia.

Príklad 25: **(objem priestorových útvarov)**

Objem kvádra je 24 cm^3 (30 m^3, 72 m^3, 84 m^3). Veľkosti jeho hrán sa dajú vyjadriť celými číslami. Určte ich. Nájdite všetky kvádre s daným objemom.

Riešenie s metodickými poznámkami:

Ak je objem kvádra 24 cm^2, potom veľkosti jeho hrán môžu byť:

1, 1, 24   1, 2, 12   1, 3, 8   1, 4, 6   2, 2, 6   2, 3, 4

Na základe skúseností vieme, že žiaci ovládajú vzorec na výpočet objemu kvádra: $V = a \,.\, b \,.\, c$. Zvyčajne však nepostupujú pri hľadaní vhodnej trojice čísel systematicky, a preto niektorí nenájdu všetky vyhovujúce riešenia. Tiež nesprávne analyzujú, čo je v zmysle zadania rovnaké a čo je rôzne. Uvedú teda ako dva rôzne kvádre kvádre s rovnakými veľkosťami hrán, ktoré zapíšu v inom poradí. Tieto skutočnosti je vhodné všímať si pri analýze žiackych riešení.

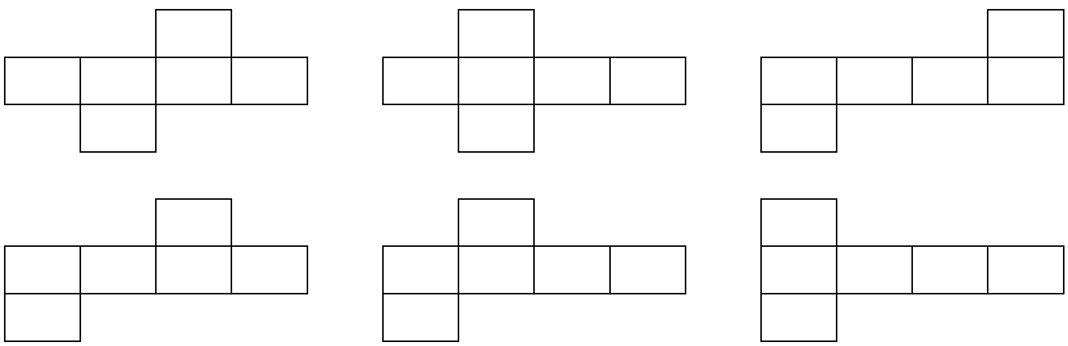
PRÍKLAD 26: (priestorové útvary)

Sieť kocky sa skladá zo šiestich rovnakých štvorcov. Nakresli čo najviac rôznych sietí kocky. Daj pozor na to, aby to naozaj boli siete kocky (ak by si ktorúkoľvek z nich vystrihol, musí sa dať kocka do takejto siete „pekne zabaliť“).

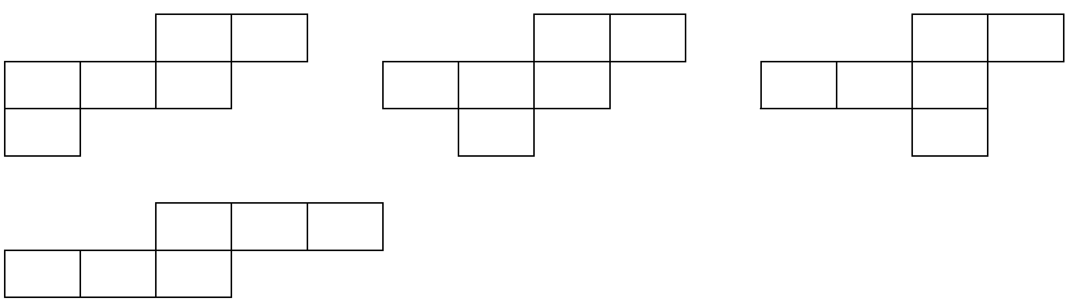
Riešenie s metodickými poznámkami:

Všetky existujúce siete kocky je vhodné roztriediť podľa pojmu „dĺžka siete“. Rozumieme pod tým maximálny počet štvorcov v sieti kocky usporiadaných v páse.

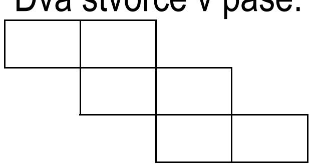
Štyri štvorce v páse:



Tri štvorce v páse:

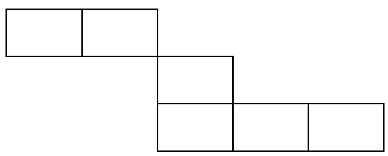


Dva štvorce v páse:



Počet všetkých rôznych sietí kocky je teda 11.

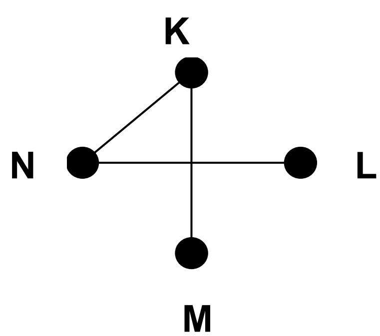
Táto úloha spája v sebe komponenty priestorovej predstavivosti a kombinatoriky. Podľa našich doterajších skúseností len veľmi málo žiakov asi dokáže nájsť všetky siete. Najskôr riešitelia nachádzajú siete so štyrmi štvorcami v páse, veľmi zriedkavo siete s tromi štvorcami v páse. Na základe realizovaných experimentov sme zistili, že takmer polovica žiakov zvykne nakresliť aj také vyobrazenia, ktoré nie sú sieťami kocky. Napr.



To poukazuje na nedostatky v priestorovej predstavivosti. Niektorí žiaci považujú za rôzne aj také siete, ktoré sú z hľadiska usporiadania štvorcov rovnaké, ale otočené o nejaký uhol. To je zasa nedostatok aj z pohľadu kombinatoriky. Ukazuje sa, že žiaci nedostatočne rozlišujú, čo je rovnaké a čo je rôzne.

PRÍKLAD 27: (teória grafov)

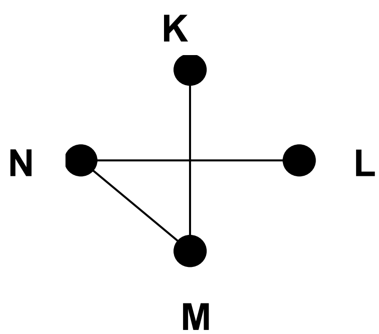
Medzi štyrmi mestami K, L, M, N je potrebné urobiť tri prepojenia telefónnymi káblami tak, aby sa z každého mesta dalo telefonovať do všetkých ostatných (ak sa dá telefonovať z K do L, z L do M, možno telefonovať aj z K do M). Jedno z riešení je na obrázku. Nájdite ostatné možnosti a nakreslite ich.

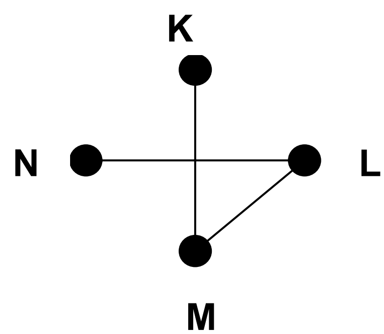


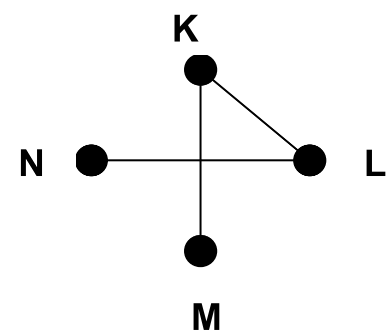
Riešenie s metodickými poznámkami:

Kombinatorická úloha, ktorá propedeuticky smeruje do teórie grafov. Ak reálnu situáciu matematizujeme, dostávame štyri body, ktoré môžeme za daných podmienok prepojiť tromi úsečkami. Vzniká teda otázka, koľko úsečiek môže vychádzať z jednotlivých bodov. Je zrejmé, že žiaden z bodov nemôže byť izolovaný, každý musí byť krajným bodom aspoň jednej úsečky a môže byť krajným bodom najviac troch úsečiek. Dostávame nasledujúce situácie:

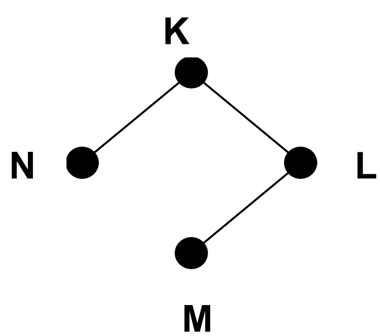
1. Z dvoch miest vychádzajú po dve prepojenia, z dvoch miest vychádza po jednom prepojení a dve prepojenia sa križujú (do tejto skupiny patrí aj možnosť zo zadania):

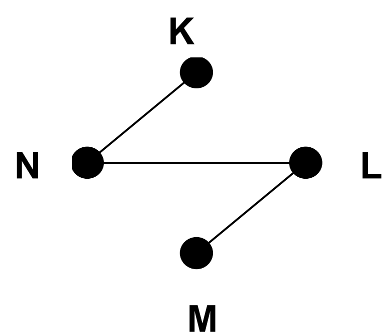


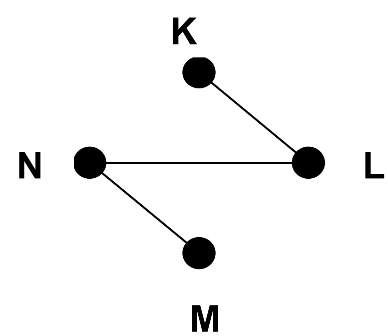


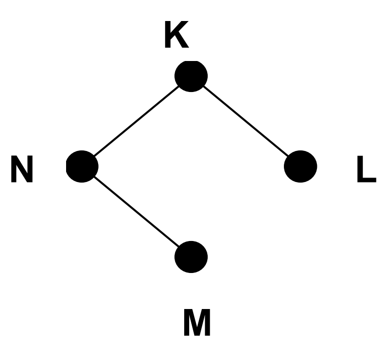


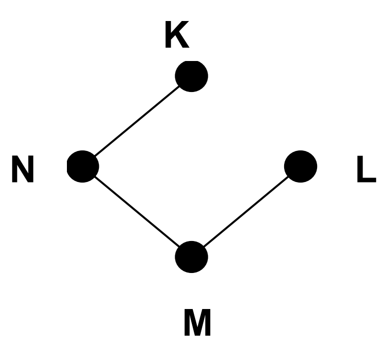
2. Z dvoch miest vychádzajú po dve prepojenia, z dvoch miest vychádza po jednom prepojení a prepojenia sa nekrižujú:

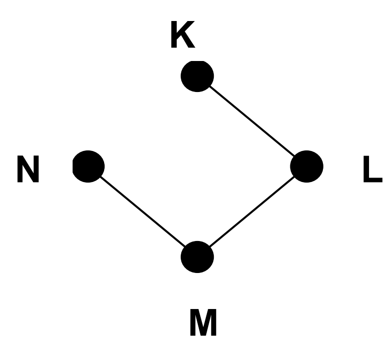


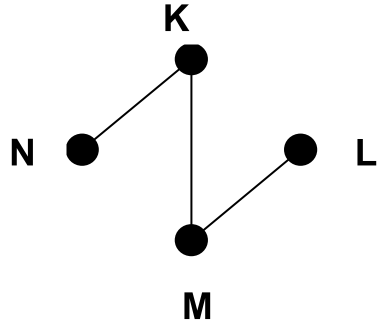


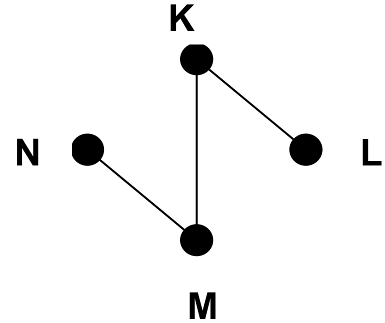




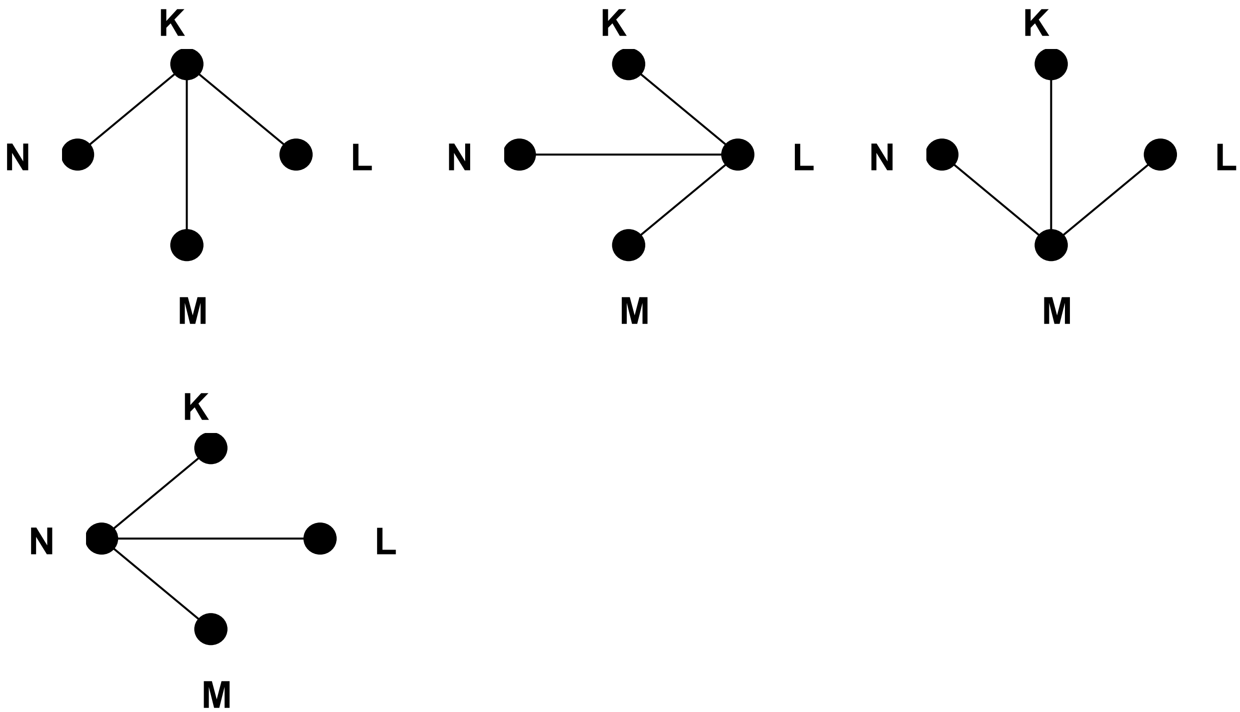








3. Z jedného mesta vychádzajú tri prepojenia a z ostatných miest vychádza len po jednom prepojení:



Táto úloha je pomerne náročná z pohľadu nájdenia všetkých možností. Jej riešenie vyžaduje jednoznačne systematický postup. Je vhodná na propedeutiku pravidla súčtu. Riešenie rozdeliť na niekoľko (v našom prípade tri) skupín, určiť počet všetkých možností v jednotlivých skupinách a počet takto vytvorených možností nakoniec spočítať.

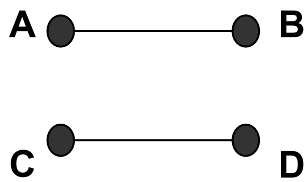
PRÍKLAD 28: (teória grafov)

Štyria bývalí spolužiaci (Anton, Boris, Cyril a Daniel) sa dohodli, že si budú písať. Znázornite graficky (pomocou bodov a úsečiek) nasledujúce situácie: a) každý si písal práve s jedným; b) každý si písal práve s dvoma; c) každý si písal práve s troma.

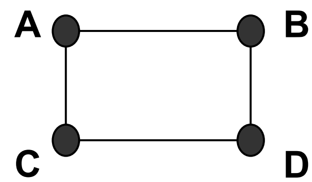
Riešenie s metodickými poznámkami:

V tejto úlohe je potrebné vykonať grafickú matematizáciu reálnej situácie s aplikáciou elementov z teórie grafov. Je vhodné poukázať na možnosť použitia matematického aparátu v sociológii na interpretáciu medziľudských vzťahov. Riešenie by mohlo vyzerať nasledovne:

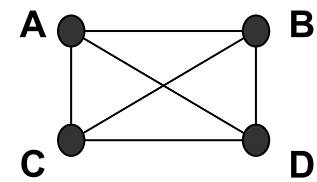
a)



b)



c)



V situáciách a), b) sú možné viaceré spôsoby grafického znázornenia (iné dvojice bodov spojené úsečkou). Je pravdepodobné, že niektorí žiaci na potvrdenie si správnosti svojho riešenia, prípadne aj ako východisko riešenia, vypíšu príslušné dvojice prvkov. Dá sa to očakávať vtedy, ak úloha bude zaradená v čase, kedy už žiaci majú nejakú skúsenosť s riešením kombinatorických úloh.

PRÍKLAD 29: (rovnice, kombinatorika)

Na dvore u starej mamy sú sliepky a zajace. Spolu majú 16 (18) nôh. Koľko tam môže byť súčasne sliepok a koľko zajacov? Nájdite všetky možnosti. Odôvodnite svoj postup riešenia.

Riešenie s metodickými poznámkami:

Úloha, ktorá smeruje k riešeniu neurčitej (diofantovskej) rovnice. Pri uplatnení kombinatorických princípov je možné riešiť ju aj iným spôsobom.

Uvažujeme takto:

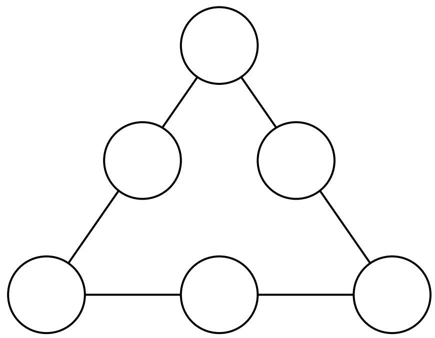
1. Ak sú na dvore len sliepky, musí ich byť práve 8.
2. Postupne znižujeme počet sliepok a analyzujeme, či daná situácia môže nastať (počet „zvyšných“nôh má byť násobok štyroch):

7 sliepok (14 nôh):	16 - 14 = 2 (žiaden zajac)	- nevyhovuje
6 sliepok (12 nôh):	16 - 12 = 4 (1 zajac)	- vyhovuje
5 sliepok (10 nôh):	16 - 10 = 6	- nevyhovuje
4 sliepky (8 nôh):	16 - 8 = 8 (2 zajace)	- vyhovuje
3 sliepky (6 nôh):	16 - 6 = 10	- nevyhovuje
2 sliepky (4 nohy):	16 - 4 = 12 (3 zajace)	- vyhovuje
1 sliepka (2 nohy):	16 - 2 = 14	- nevyhovuje
žiadna sliepka (0 nôh):	16 - 0 = 16 (4 zajace)	- vyhovuje

Výsledné riešenie môžeme uviesť dvoma spôsobmi. Ak na dvore môže byť aj iba jeden druh zvierat, dostávame 5 možností. Ak tam musia byť dva druhy zvierat, vyhovujú iba tri možnosti. Samozrejme je správne aj také riešenie, ktoré využíva matematický model, t. j. rovnicu s dvoma neznámymi: $2x + 4y = 16$ a jej riešenie metódou voľby číselnej hodnoty za jednu neznámu a následne výpočet druhej neznámej v obore všetkých prirodzených čísel.

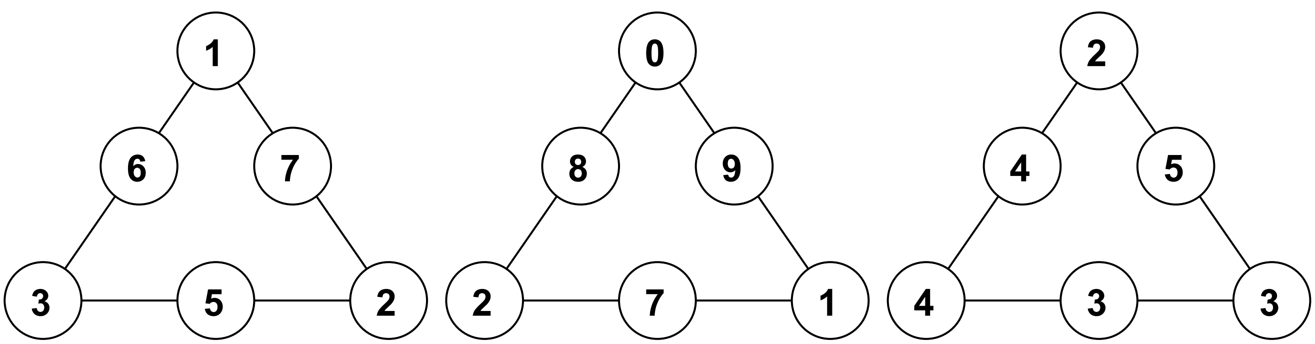
PRÍKLAD 30: (rekreačná matematika, kombinatorika)

Tento trojuholník je „magický“. Každá jeho strana má hodnotu 10. Skús doplniť do kruhov jednociferné čísla tak, aby to bola pravda. Ak to dokážeš urobiť aj viacerými spôsobmi, dokresli si ďalšie „magické“ trojuholníky.



Riešenie s metodickými poznámkami:

Úloha z tzv. rekreačnej matematiky, v ktorej sa uplatnia aj kombinatorické princípy. Niektoré riešenia:



Zadanie môžeme rôznym spôsobom obmieňať:

- môže alebo nemôže byť použitá nula;
- každé číslo môže byť použité najviac raz;
- jednotlivé čísla môžeme použiť aj viackrát atď.

ZÁVER

Kombinatorika, v minulosti často obchádzaná a neobľúbená, hľadá svoju cestu do elementárneho matematického vzdelávania. Jej vstup však nemôže byť násilný.

Podľa *Plockého* (2002) jednou z podstatných úloh matematického vzdelávania je zvykanie si žiaka na metodológiu matematiky. Poznanie procesu matematizácie, organizovanie matematickej činnosti žiaka a rozvoj jeho intelektuálnych postojov typických pre túto aktivitu. Teda aj hlavná úloha kombinatoriky spočíva v tom, aby došlo k oboznámeniu sa s metódami a spôsobmi myslenia, ktoré sú charakteristické pre kombinatoriku. Cieľom nemôže byť odovzdať žiakom množstvo poznatkov a formálnych vedomostí. Hlavným cieľom musí byť formovanie kognitívnej stránky osobnosti žiaka, t. j. rozvíjanie jeho schopnosti myslieť, teda aj kombinatoricky myslieť.

Cesta k pozitívnemu vnímaniu matematiky zo strany učiteľa, jeho žiaka, následne rodiča a napokon celej spoločnosti určite nie je jednoduchá. Jedným jej smerom by, podľa nášho názoru, mohla byť aj kombinatorika. Tá časť matematiky, ktorá na prvý pohľad vyzerá „dosť nematematicky“, ale nachádza svoje široké uplatnenie v rôznorodých oblastiach nášho života.

Na tejto ceste mi veľmi pomohli kolegovia zo Základnej školy na Šrobárovej ul. v Prešove. Ďakujem pani riaditeľke PaedDr. V. Stankovenovej za umožnenie realizácie pedagogického experimentu. Veľká vďaka za spoluprácu patrí pani učiteľke Mgr. V. Guziovej a tiež kolegyniam Mgr. B. Fáberovej, Mgr. K. Ferencovej, Mgr. G. Novackej.

Milí kolegovia, učitelia matematiky, veľmi rada privítam Vaše postrehy, pripomienky, návrhy a podnety na spoluprácu, aby sme spoločne ukázali našim žiakom aspoň kúsok z tej krásy, ktorú v sebe skrýva matematika.

LITERATÚRA

Bálint, Ľ. 1980: *Prvky kombinatoriky, štatistiky a pravdepodobnosti v učive matematiky 1. - 4. ročníka základnej školy v MĽR.* In: Zborník Pedagogickej fakulty v Nitre, 1, Matematika, s. 171 - 184. Bratislava: SPN, 1980.

Cirjak, M. 2000: *Zbierka divergentných a iných neštandardných úloh (tvorivosť v matematike).* Prešov: Essox, 2000. ISBN 80-968369-0-0

Hejný, M. a kol. 1989: *Teória vyučovania matematiky 2.* Bratislava: SPN, 1989. ISBN 80-08-00014-7

Hejný, M. - Michalcová, A. 2001: *Skúmanie matematického riešiteľského postupu.* Bratislava: Metodické centrum v Bratislave, 2001. ISBN 80-8052-085-2

Hromkovič, J. 2000: *Qou vadis matematika: O kríze matematiky a možných východiskách.* In: Obzory matematiky, fyziky a informatiky, 2/2000 (29), s. 30 - 36.

Plocki, A. 2002: *Počet pravděpodobnosti pro každého - aneb co, jak a proč se matematizuje.* In: Zborník príspevkov z medzinárodnej konferencie Podíl matematiky na přípravě učitele primární školy. Olomouc: UP, 2002. s. 134 - 143. ISBN 80-244-0440-0

Preparata, F. P. - Raymond, T. Y. 1982: *Úvod do teórie diskrétnych matematických štruktúr.* Bratislava: Alfa - SNTL, 1982.

Rosenstein, J. G. 1997: *A Comprehensive View of Discrete Mathematics: Chapter 14 of the New Jersey Mathematics Curriculum Framework.* In: Dimacs series in discrete mathematics and theoretical computer science, v. 36. s. 133 - 174. ISSN 1052-1798

Scholtzová, I. 1999: *Kombinatorika na ZŠ - názory učiteľov matematiky.* In: MIF - MC v Prešove, 1999, č. 16, s. 7 - 9.

Scholtzová, I. 2000: *Kombinatorika na ZŠ - názory učiteľov matematiky (II. časť).* In: MIF - MC v Prešove, 2000, č. 17, s. 13 - 19.

Scholtzová, I. 2001: *Kombinatorické úlohy v prijímacích testoch na stredné školy.* In: Zborník z konferencie „Matematika v škole dnes a zajtra". Ružomberok: Katecheticko-pedagogická fakulta sv. Ondreja KU, 2001. s. 126 - 129.

Scholtzová, I. 2002: *Sonda do kombinatorického myslenia žiakov základnej školy.* In: Zborník príspevkov z konferencie „Matematika v škole dnes a zajtra". Ružomberok: Pedagogická fakulta Katolíckej univerzity, 2002. http://fedu.ku.sk./konferencia/Scholtzova.pdf

Scholtzová, I. 2002: *Analýza riešení kombinatorických úloh.* In: Zborník príspevkov z medzinárodnej konferencie Podíl matematiky na přípravě učitele primární školy. Olomouc: UP, 2002. s. 172 - 176. ISBN 80-244-0440-0

Scholtzová, I. 2003: *O jednom kombinatorickom experimente.* Zborník príspevkov z medzinárodnej vedeckej konferencie „Príprava učiteľov - elementaristov v novom storočí". Prešov: Pedagogická fakulta PU, 2003. s. 412 - 417. ISBN 80-8068-146-5
Zelina, M. 1990. *Tvorivosť v matematike*. Bratislava: KPÚ, 1990. ISBN 80-85185-34-2

METODICKO-PEDAGOGICKÉ CENTRUM V PREŠOVE

Iveta Scholtzová

INTEGRÁCIA KOMBINATORIKY DO VYUČOVANIA MATEMATIKY NA ZÁKLADNEJ ŠKOLE

Riešené príklady s metodickými poznámkami

- 2004 -

Názov	:	Integrácia kombinatoriky do vyučovania matematiky na základnej škole (Riešené príklady k metodickým poznámkam)
Autor	:	RNDr. Iveta Scholtzová
Recenzenti	:	RNDr. Jana Hnatová Mgr. Eva Schwartzová
Jazyková úprava	:	Mgr. Mária Ďurčeková
Vydavateľ	:	Metodicko-pedagogické centrum v Prešove
Za vydanie zodpovedá	:	PaedDr. Ivan Pavlov, PhD. riaditeľ MPC
Náklad	:	300 ks
Rok vydania	:	2004

1. vydanie

ISBN 80-8045-340-3

N e p r e d a j n é !

Určené pre vzdelávacie potreby pedagogických zamestnancov škôl, školských zariadení východného Slovenska.