

Postupnosti, rady limita postupnosti

Postupnosti

- ▶ *Postupnosti sú funkcie, ktorých definičným oborom je množina prirodzených čísel alebo jej časť*

$$n \rightarrow a_n, n \in N$$

Napr.:

{1, 2, 4, 8, ...} nekonečná postupnosť

{2, 4, 6, 8, 10} konečná postupnosť

Postupnosti – zápis

- ▶ Vymenovaním členov

$$\{2, 3, 4, 5, \dots\}$$

- ▶ Všeobecný predpis pre n-tý člen

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, a_n = 2n$$

- ▶ Rekurentne

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, a_{n+1} = a_n + 2, a_1 = 5$$

Postupnosti – zápis

EHK2/99

Napište prvých 5 členov postupnosti, ktorej n -tý člen je

a) $a_n = \frac{1}{3^n}$

b) $a_n = \frac{3n + 1}{2n - 5}$

EHK2/100

Nájdite predpis pre n -tý člen postupnosti

a) $\left\{ \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots \right\}$

b) $\{2, -2, 2, -2, 2, \dots\}$

Postupnosti – sůčet

- ▶ Spočítajte sůčet prirodzených čísel od 1 do 100
- ▶ Nájdite sůčet prvých desať členov aritmetickej postupnosti

$$\{1, 3, 5, 7, \dots\} \quad S_{10} = ?$$

Vzorce aritmetická postupnost

- ▶ Aritmetická postupnost

$$a_n = a_{n-1} + d$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$$

Súčet konečného radu

Zápis:
$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Vzorce geometrická postupnosť

- ▶ Geometrická postupnosť

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Súčet konečného
geometrického radu

ODVODENIE:

$$a_1=1, q=2, S_5=?$$

Vzorce geometrická postupnost

Súčet nekonečného radu $S_{\infty} = a_1 + a_2 + \dots$

Iný zápis: $S_{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

(konečný súčet n členov $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$)

► Nekonečný geometrický rad

$$\text{ak } |q| < 1 \quad S_{\infty} = S = a_1 \cdot \frac{1}{1 - q}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, |q| < 1$

Postupnosti – súčet

- ▶ Nájdite súčet prvých osem členov geometrickej postupnosti

$$\{2, 6, 18, 54, \dots\} \quad S_8 = ?$$

- ▶ Nájdite súčet nekonečného geometrického radu

$$S_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{5}{7}\right)^n$$

Limita postupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n > n_0 |a_n - b| < \varepsilon$$

$$\text{Pr. : } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Limita postupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad p > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{q} = 1 \quad q > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Limita postupnosti

Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ $a, b \in R$

$$\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b$$

$$\lim(c \cdot a_n) = c \cdot a, c \in R$$

$$\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}, b \neq 0$$

Úlohy limity

Vypočítajte:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n^2} - \sqrt[n]{7} \right)$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(n-2)}{(2n+1)^2}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{2n^2 - n + 1}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 5}{n + 8}$$