DVA DNI S DIDAKTIKOU MATEMATIKY 2021

ZBORNÍK PRÍSPEVKOV

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
BRATISLAVA 9. – 10. 9. 2021

ORGANIZÁTOR

ODDELENIE DIDAKTIKY MATEMATIKY
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

PROGRAMOVÝ A ORGANIZAČNÝ VÝBOR

MÁRIA SLAVÍČKOVÁ
MONIKA DILLINGEROVÁ
EMÍLIA MIŤKOVÁ
PETER VANKÚŠ
MICHAELA VARGOVÁ

EDITOR

MÁRIA SLAVÍČKOVÁ

Táto publikácia neprešla jazykovou úpravou. Príspevky neboli recenzované. Za obsahovú náplň príspevkov a ich jazykovú stránku zodpovedajú autori.

Vyšlo v roku 2021

ISBN 978-80-8147-108-7

OBSAH

1. Pozvané prednášky a panelová diskusia

2. Príspevky účastníkov

Milé kolegyne, milí kolegovia.

Šiesty ročník konferencie Dva dni s didaktikou matematiky bol zorganizovaný hybridnou formou, keďže situáciu stále komplikovala situácia súvisiaca so šírením vírusu COVID-19. Všetci sme už mali viac ako rok skúseností s dištančnou výučbou, čo mohlo súvisieť s výrazne menšími technickými problémami či už na strane organizátorov, alebo účastníkov. Výrazne nás potešilo, že viac ako polovica účastníkov uprednostnila osobnú účasť za dodržania aktuálnych opatrení vydaných Úradom verejného zdravotníctva.

Atmosféra bola priateľská, tak ako to už na našej konferencii býva. Tento ročník bol umocnený aj možnosťou stáť a prednášať pre ľudí a nie pre kameru a prázdne stoličky, prípadne len do obrazovky počítača. Mať živé a reagujúce publikum bolo po vyše roka za počítačmi oceňované všetkými fyzicky prítomnými účastníkmi. Počasie nám prialo a možno aj preto prestávka na kávu v exteriéri fakulty bol veľmi oceňovaný bod programu.

Teší nás, že každý rok pribudnú nové tváre na našej konferencii a dúfame, že sa s radosťou vrátia aj na ďalšie pripravované ročníky, či už s príspevkom, alebo bez neho. Aj pri organizovaní šiesteho ročníka nám pomohol projekt KEGA 014UK-4/2020, bez ktorého by technické zabezpečenie konferencie nebolo možné. Ďakujeme.

So želaním úspešného školského roka a veľa dobrých nápadov

za programový a organizačný výbor želá

Mária Slavíčková

PREDNÁŠKA 1: UČEBNICA AKO PROSTRIEDOK KOMUNIKÁCIE V MATEMATIKE

SOŇA ČERETKOVÁ

Učebnica matematiky komunikuje nielen so žiakmi a učiteľmi na hodinách matematiky a počas individuálneho štúdia, ale, ako sa ukázalo aj v čase obmedzení v dôsledku pandemickej situácie, je dôležité, aby učebnici rozumeli i rodičia žiakov či každý, kto si učebnicu z prinútenia alebo zo záujmu otvorí, číta, prečíta a počíta. Funkcie, princípy tvorby, jazyk, obrázky či ilustrácie v učebnici matematiky sú skúmané z rôznych uhlov pohľadu.

Čo všetko si musia autori učebníc matematiky pre ich tvorbe uvedomiť, čo všetko si uvedomia až po uvedení učebnice do praxe, čo všetko do učebnice nie je vhodné a čo sa do učebnice už nezmestí... Aj o tom bola prednáška, ktorú si môžete pozrieť na:

https://www.youtube.com/watch?v=yRkyFl650wo

doc. PaedDr. Soňa Čeretková, PhD.
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra

PREDNÁŠKA 2: UČEBNICA POMÁHA UČITEĽOVI DIFERENCOVAŤ VÝUKU

MILAN HEJNÝ

V tradičnom frontálnom vyučovaní pracuje celá trieda spoločne. Slabší žiaci nestačia, špičkoví sa nudia. Učiteľ, ktorý vyučovanie diferencuje, zamestnáva každého žiaka primerane jeho úrovni. Učebnica môže učiteľovi v tomto smere výrazne pomôcť. Niekoľko obecných myšlienok bude doplnených sériou ilustrácií.

Záznam z prednášky je dostupný na:

https://www.youtube.com/watch?v=qzkV4EEW15E&t=54s

prof. RNDr. Milan Hejný, CSc.
Pedagogická fakulta
Karlova Univerzita
M. Rettigové 4
CZ – 116 39 Praha

PANELOVÁ DISKUSIA: DIŠTANČNÉ VZDELÁVANIE – PRÍNOSY A NEGATÍVA

IVANA HUČKOVÁ, ERIKA FARKAS ERDÉLYI, PETER HALÁK, ZBYNĚK KUBÁČEK

Panelová diskusia na aktuálnu tému moderovaná doc. Kubáčkom z Katedry matematickej analýzy a numerickej matematiky na Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzity Komenského v Bratislave, býva každoročne zaraďovaná do programu v dopoludnie druhého dňa konferencie. Výnimkou bol len piaty ročník, keď konferencia bola organizovaná plne online formou.

Pozvaní panelisti do tohoročnej diskusie boli:

- RNDr. Ivana Hučková, PhD.
  Gymnázium C.S. Lewisa
  Bratislava
- Mgr. Erika Farkas Erdélyi
  ZŠ a Gymnázium s vyučovacím jazykom maďarským,
  Bratislava
- Ing. Peter Halák
  Indícia, n.o.
  Bratislava

Do diskusie sa zapájali ako fyzicky prítomní účastníci, tak aj online účastníci a vyhradený blok 1,5 nestačil na dodiskutovanie všetkých dôležitých aspektov.

Záznam z diskusie je dostupný na:

https://www.youtube.com/watch?v=-YHkPp8ylwA&t=106s

PROCES POSUDZOVANIA DIDAKTICKÉHO PROSTRIEDKU ZA ÚČELOM VYDANIA ODPORÚČACEJ DOLOŽKY ALEBO SCHVAĽOVACEJ DOLOŽKY MINISTERSTVOM ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

ĽUBOMÍR BLAHO

ABSTRAKT. *Učebnicová politika prešla v poslednom roku principiálnymi zmenami. V príspevku preto pojednávame o úlohe Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky v procese vydávania doložiek pre didaktické prostriedky, učiteľom predstavujeme možnosti, ako sa spolupodieľať na zlepšovaní a skvalitňovaní didaktických prostriedkov a poukazujeme na časté nedostatky, ktorých sa autori pri písaní didaktických prostriedkov z matematiky dopúšťajú.*

Úvod

Niekedy si človek dokáže len veľmi ťažko predstaviť, aký zložitý a dlhotrvajúci proces prebieha od chvíle napísania didaktického prostriedku (ďalej len „DP“) autorom do momentu, kedy sa DP ocitne na lavici žiaka v škole. V príspevku priblížime proces vyhodnocovania žiadosti o vydanie odporúčacej doložky alebo schvaľovacej doložky pre DP na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky (ďalej len „ministerstvo“), oboznámime čitateľa o dôležitých webových stránkach a odkazoch, predstavíme základnú dokumentáciu spätú s procesom vyhodnocovania žiadosti a zoznam DP z matematiky s platnou odporúčacou doložkou alebo schvaľovacou doložkou a na záver uvedieme najčastejšie pripomienky odborných zamestnancov Štátneho pedagogického ústavu k posudzovaným DP z matematiky.

Žiadosť o vydanie odporúčacej doložky alebo schvaľovacej doložky

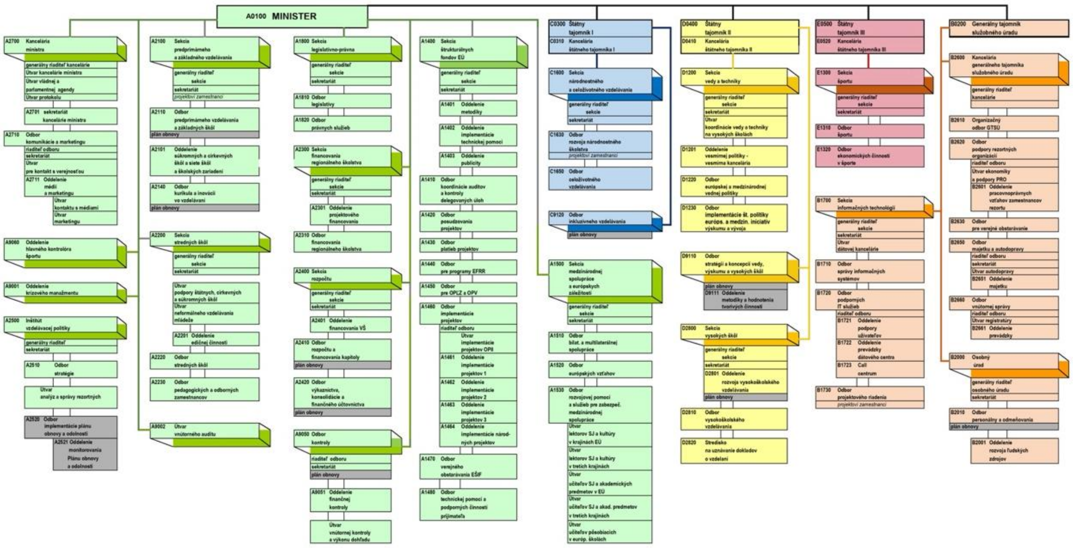
Všetky DP, pre ktoré predkladateľ žiada vydanie odporúčacej doložky alebo schvaľovacej doložky, musia spĺňať náležitosti § 13 ods. 3 Zákona 245/2008 o výchove a vzdelávaní. [1] Pri každej žiadosti o vydanie odporúčacej doložky alebo schvaľovacej doložky sa musí postupovať podľa smernice č. 33/2020 o didaktických prostriedkoch v znení neskorších vnútorných aktov riadenia (ďalej len „smernica“). [2] Smernica podpísaná ministrom školstva vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky má aj s doplneniami približne 22 strán a okrem iného vymedzuje niektoré pojmy, upravuje obsah žiadosti vrátane základných informácií o DP, definuje postup pri vydávaní odporúčacej doložky alebo schvaľovacej doložky a pod.

V súčasnosti spadá Oddelenie edičnej činnosti (obr. 1), ktoré spravuje agendu vydávania doložiek, pod Sekciu stredných škôl (ďalej len „sekcia“), ktorá komunikuje s priamo riadenými organizáciami ministerstva (ďalej len „PRO“) – Štátnym pedagogickým ústavom (ďalej len „ŠPÚ“) alebo Štátnym inštitútom odborného vzdelávania (ďalej len „ŠIOV“) – a koordinuje celý postup. Ak po doručení žiadosti ministerstvu príslušná sekcia vyhodnotí žiadosť za úplnú, postúpi didaktický prostriedok PRO. Odborní zamestnanci PRO (didaktici a odborníci venujúci sa konkrétnym všeobecnovzdelávacím alebo odborným predmetom) následne v lehote 50 dní (v prípade ŠPÚ) alebo 90 dní (v prípade ŠIOV) vypracujú priamy posudok a predseda komisie na posudzovanie DP vyhotoví odporúčací protokol alebo schvaľovací protokol, v ktorom sa ministerstvu buď odporučí alebo

[1] https://www.slov-lex.sk/pravne-predpisy/SK/ZZ/2008/245/20210710

[2] https://www.minedu.sk/data/att/20419.pdf

neodporučí vydať odporúčaciu doložku alebo schvaľovaciu doložku pre daný DP. V prípade procesu vydávania schvaľovacej doložky pre niektoré DP, vypracováva recenzný posudok aj náhodne vygenerovaný recenzent zaradený v zozname recenzentov, ktorého určí ministerstvo. Po naštudovaní dokumentácie dodanej PRO, ministerstvo vydá alebo nevydá odporúčaciu doložku alebo schvaľovaciu doložku pre posudzovaný DP.



Obrázok 1: Organizačný poriadok Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky platný k 1. augustu 2021

Webové stránky

Z organizačného hľadiska je najdôležitejšia webová stránka ministerstva školstva,[3] kde sú v kolónke *„Regionálne školstvo“* na odkaze *„Učebnice, učebné texty, pracovné zošity“* zverejnené aktuálne a platné smernice a ďalšie odkazy na dôležité stránky. Na odkaze *„Dokumenty schvaľovacieho procesu didaktických prostriedkov“* sa je možné oboznámiť s rôznou dokumentáciou:

- Protokoly pre vydanie odporúčacej doložky alebo schvaľovacej doložky vypracované predsedom komisie na posudzovanie didaktických prostriedkov PRO;
- Zoznam schválených učebníc, schválených učebných textov, schválených pracovných zošitov, odporúčaných učebníc a odporúčaných pracovných zošitov, na zakúpenie ktorých ministerstvo poskytne školám príspevok (ďalej len „zoznam didaktických prostriedkov“)[4] – na základe tohto zoznamu si môžu školy nakupovať DP pre svojich žiakov z príspevku ministerstva;
- Databáza didaktických prostriedkov – aktuálny stav posudzovaných žiadostí a základné informácie o DP vrátane vyučovacieho predmetu, pre ktorý je DP určený, názvu DP, mien autorov, informácií o procese posudzovania a v prípade vydanej doložky aj vrátane doby platnosti doložky;
- Register recenzentov všeobecnovzdelávacích predmetov a odborných predmetov[5] – menný zoznam recenzentov usporiadaných podľa predmetov a úrovní ISCED

[3] www.minedu.sk

[4] https://www.minedu.sk/data/att/20565.pdf

[5] https://www.minedu.sk/data/att/18965.pdf, https://www.minedu.sk/data/att/18059.pdf

(The International Standard Classification of Education) vrátane adresy pracoviska recenzentov, ktorí majú v prípade určenia ministerstvom možnosť vypracovať recenzný posudok k DP. Z matematiky je aktuálne k úrovni ISCED 1 zaradených 24 recenzentov, k úrovni ISCED 2 je zaradených 19 recenzentov a k úrovni ISCED 3 je zaradených 13 recenzentov (obr. 2) – vrátane recenzentov pre školy s vyučovacím jazykom maďarským. V zozname sú aj dvaja recenzenti z matematiky pre žiakov so špeciálnymi výchovno-vzdelávacími potrebami. Do zoznamu recenzentov výchovno-vzdelávacích predmetov môže byť zaradený ktorýkoľvek učiteľ alebo vedecko-odborný pracovník, ktorý požiada ŠPÚ o zaradenie do zoznamu recenzentov a ktorý spĺňa kritériá stanovené ŠPÚ.[6]

Druhou dôležitou webovou stránkou je Edičný portál,[7] kde je v kolónke *„Menu“* možné nájsť výstupy schvaľovacieho procesu, vzory pedagogickej dokumentácie a dokladov, zoznam dokumentov a v neposlednom rade portál eAktovka,[8] ktorý bezplatne sprístupňuje učebnice v digitálnej forme žiakom a učiteľom základných a stredných škôl, ku ktorým má ministerstvo s autorom DP, resp. vydavateľstvom, uzavretú platnú licenčnú zmluvu o udelení sublicencie.

	ISCED 3 MATEMATIKA	
1.	RNDr. Renáta Kunová, PhD.	Gymnázium Janka Kráľa, Ul. SNP 3, 953 42 Zlaté Moravce
2.	doc. RNDr. Štefan Karolčík, PhD.	UK v Bratislave, Prírodovedecká fakulta, Mlynská dolina, Ilkovičova 6 842 15 Bratislava 4
3.	Mgr. Andrea Kvorková	Gymnázium, Školská 2, 018 41 Dubnica nad Váhom
4.	Mgr. Marcela Švirlochová	Spojená škola Svätej Rodiny, Gercenova 10, 85101 Bratislava
5.	RNDr. Monika Dillingerová, PhD.	Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
6.	Mgr. Jana Fraasová	Spojená škola, Novohradská 3, 821 09 Bratislava
7.	RNDr. Viera Ringlerová, PhD.	*bez trvalého pracovného pomeru*
8.	Mgr. Tatiana Hiková	Gymnázium, Hlinská 29, 01180 Žilina
9.	Mgr. Anton Belan	Škola pre mimoriadne nadané deti a gymnázium, Teplická 7, 831 02 Bratislava
10.	RNDr. Tatiana Grandová	Škola umeleckého priemyslu, Slavkovská 19, 060 01 Kežmarok
11.	Mgr. Erzsébet Kálmán (VJM)	ZŠ Z. Kodálya s VJM, Komenského ul. 1219/1, 929 01 Dunajská Streda
12.	Mgr. Takácsová Zuzana (VJM)	Gymnázium Z. Kodálya s VJM, SNP 1004/34, 924 01 Galanta
13.	Mgr. Hykeš Judit (VJM)	ZŠ Z. Kodálya s VJM, Komenského ul. 1219/1, 929 01 Dunajská Streda

Obrázok 2: Zoznam recenzentov z matematiky pre vzdelanostnú úroveň ISCED 3 platný k 1. septembru 2021

Didaktické prostriedky z matematiky

V zozname DP je aktuálne (27. august 2021) približne 270 DP z matematiky určených pre žiakov primárneho a sekundárneho vzdelávania vrátane špeciálnych základných škôl a škôl s vyučovacím jazykom maďarským. Nachádzajú sa medzi nimi aj mutácie DP do jazyka národnostných menšín, DP upravené špeciálne pre sluchovo postihnutých,

[6] https://www.statpedu.sk/sk/svp/ucebnice-didakticke-prostriedky/register-recenzentov/

[7] https://edicnyportal.iedu.sk/

[8] https://edicnyportal.iedu.sk/Briefcase

prepisy do Braillovho písma, elektronické verzie DP a pod. Pre nižšie a vyššie sekundárne vzdelávanie je v zozname zaradených 150 DP z matematiky (30 aktuálne v procese posudzovania). Medzi najznámejšie vydavateľstvá DP z matematiky môžeme spomenúť Slovenské pedagogické nakladateľstvo – Mladé letá, EXPOL PEDAGOGIKA, Orbis Pictus Istropolitana, LiberaTerra, TAKTIK vydavateľstvo, MAPA Slovakia Plus, ŠEVT, Dr. Josef Raabe Slovensko, AITEC, ABCedu, Indícia, Nakladatelství Fraus a iné.

Najfrekventovanejšie nedostatky didaktických prostriedkov z matematiky

Po analýze verejne prístupných protokolov pre DP z matematiky, vypracovaných predsedom komisie na posudzovanie didaktických prostriedkov na ŠPÚ, sme identifikovali najčastejšie sa opakujúce nedostatky DP a rôzne ďalšie špecifiká, za ktoré sú DP kritizované:

- DP nie je v súlade so Štátnym vzdelávacím programom;
- Absencia množstva výkonového a obsahového štandardu;
- Jazykové a terminologické nepresnosti, nepresné matematické formulácie zadaní úloh, nelogickosť úloh;
- Pravopisné chyby;
- Podporovanie stereotypov, napr. že ženy zarábajú menej ako muži;
- Spracovanie učiva v maďarskej mutácii nespĺňa kritéria stanovené na preklady DP;
- Prevažujúce zastúpenie úloh zameraných na nižšie kognitívne funkcie (zapamätávanie, porozumenie, ...) ako na vyššie kognitívne funkcie (hodnotenie, tvorenie, ...);
- Nekvalitné a zastaralé grafické spracovanie DP.[9]

LITERATÚRA

[1] *Zákon č. 245/2008 o výchove a vzdelávaní (školský zákon) a o zmene a doplnení niektorých zákonov*, Bratislava, 2008, dostupné na internete: https://www.slov-lex.sk/pravne-predpisy/SK/ZZ/2008/245/20210710

[2] *Smernica č. 33/2020 o didaktických prostriedkov v znení neskorších vnútorných predpisov*, Bratislava, Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky, 2021, dostupné na internete: https://www.minedu.sk/data/att/20419.pdf

[3] *Webová stránka Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky, dostupné na internete: https://www.minedu.sk/*

[4] *Zoznam schválených učebníc, schválených učebných textov, schválených pracovných zošitov, odporúčaných učebníc a odporúčaných pracovných zošitov, na zakúpenie ktorých ministerstvo školstva poskytne školám finančné prostriedky - 2021*, Bratislava, v Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky, 2021, dostupné na internete: https://www.minedu.sk/data/att/20565.pdf

[5] *Register recenzentov pre všeobecnovzdelávacie predmety a odborné predmety*, Bratislava, Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky, 2021, dostupné na internete: https://www.minedu.sk/data/att/18965.pdf, https://www.minedu.sk/data/att/18059.pdf

[9] https://www.minedu.sk/dokumenty-schvalovacieho-procesu-didaktickych-prostriedkov/

[6] *Registrácia do registra recenzentov na webovej stránke Štátneho pedagogického ústavu*, dostupné na internete: https://www.statpedu.sk/sk/svp/ucebnice-didakticke-prostriedky/register-recenzentov/

[7] *Webová stránka Edičný portál, dostupné na internete: https://edicnyportal.iedu.sk/*

[8] *Webová stránka eAktovka*, dostupné na internete: https://edicnyportal.iedu.sk/Briefcase

[9] *Protokoly k didaktickým prostriedkom, dostupné na internete: https://www.minedu.sk/dokumenty-schvalovacieho-procesu-didaktickych-prostriedkov/*

Bc. Ľubomír Blaho
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: lubomirblaho@yahoo.com

GEOMETRICKÉ MYSLENIE ŽIAKOV KONČIACICH NIŽŠIE STREDNÉ VZDELÁVANIE

VERONIKA BOČKOVÁ, GABRIELA PAVLOVIČOVÁ

ABSTRAKT. *V príspevku stručne predstavíme van Hieleho teóriu geometrického myslenia a jej základné myšlienky. Uvedieme výsledky výskumu, ktorý bol zameraný na určenie úrovne geometrického myslenia žiakov končiacich nižšie stredné vzdelávanie. V príspevku sa taktiež zameriame na analýzu chýb v riešení vybraných geometrických úloh na rôznych kompetenčných úrovniach.*

Úvod

Geometria je dôležitou súčasťou každodenného života ako i matematického vzdelávania. Napriek tomu, že sa geometriou zaoberá dvanásť tematických celkov tematického okruhu Geometria a meranie na druhom stupni základnej školy, žiaci majú výrazné problémy s riešením rôznych geometrických úloh. Problémy žiakov môžu byť spôsobené nízkou úrovňou geometrického myslenia alebo nedostatočným osvojením si matematických kompetencií v rámci geometrie.

Geometrické myslenie

Pod geometrickým myslením rozumieme najmä schopnosť žiakov používať geometrické pojmy vo vyučovaní matematiky, ale i v rôznych oblastiach každodenného života [1]. Podľa Fishera [2] geometrické myslenie závisí od toho, ako ľudská myseľ dokáže používať vlastnosti geometrických útvarov a priestorové vzťahy. Existujú rôzne štúdie, ktoré sa zoberajú geometrickým myslením žiakov. Jednou z najdôležitejších a najpoužívanejších štúdií zaoberajúcich sa geometrickým myslením je od 50-tych rokov 20. storočia van Hieleho teória geometrického myslenia.

Van Hieleho teória obsahuje päť úrovní geometrického myslenia Vzdelávací model podporuje učenie geometrie a pomoc pri postupe cez jednotlivé úrovne myslenia v geometrii. Taktiež tvorí základ obsahu vzdelávania v rôznych krajinách, ako napríklad v Spojených štátoch amerických, Rusku, Holandsku, Taiwane a Juhoafrickej republike. Jednotlivé úrovne geometrického myslenia môžeme charakterizovať nasledovne [3]:

1. úroveň – vizualizácia: Žiaci identifikujú geometrické útvary na základe ich komplexného vizuálneho vnímania. Dokážu pomenovať a rozoznať geometrické útvary na základe ich celostného vzhľadu alebo podobnosťou so známym útvarom.

2. úroveň – analýza: Žiaci poznajú vlastnosti geometrických útvarov, dokážu vytvoriť triedy geometrických útvarov na základe ich spoločných vlastností.

3. úroveň – abstrakcia: Žiaci si uvedomujú vzťahy medzi vlastnosťami útvarov, vedia, že jednotlivé vlastnosti sú usporiadané a navzájom prepojené. Dokážu formulovať korektné abstraktné definície, ktoré sa vyznačujú svojou ekonomickosťou.

4. úroveň - dedukcia: Žiaci poznajú potrebu logického systému geometrie, významu dedukcie, postaveniu a úloh axióm, viet a definícií. Žiaci taktiež dokážu realizovať jednoduché dôkazy na stredoškolskej úrovni.

5. úroveň – axiomatizácia: Žiaci dokážu porovnať axiomatické systémy, popísať vplyv pridania alebo odstránenia axiómy v danom geometrickom systéme a sú schopní používať všetky typy dôkazov.

Na určenie úrovne geometrického myslenia sa používa van Hieleho geometrický test, ktorý vytvoril profesor Zelman Usiskin [4] z Chicagskej univerzity. Test pozostáva z dvadsiatich piatich testovacích otázok, každá otázka je s výberom z piatich možných odpovedí. K určeniu každej úrovne geometrického myslenia je priradených päť otázok.

Matematické kompetencie

S rozvojom geometrického myslenia je nevyhnutný aj rozvoj matematických kompetencií v oblasti geometrie. Pod pojmom matematická kompetencia rozumieme všeobecné matematické vedomosti, schopnosti a zručnosti, ktoré zodpovedajú príslušným úrovniam vzdelania [5]. V literatúre sa stretávame s rôznymi definíciami matematických kompetencií a taktiež s ich rozdelením. OECD PISA [6] opisuje matematické kompetencie na základe troch úrovní:

1. **Reprodukčná úroveň** – Žiaci dokážu zopakovať naučený materiál, uskutočniť rutinné výpočty a vyriešiť nenáročné problémy.
2. **Úroveň prepojenia** – Žiaci dokážu riešiť problémy, ktoré nie sú rutinné s využitím integrácie, prepojenia, spojenia známych metód, jednoduchého doplnenia osvojených poznatkov a modelovaním.
3. **Úroveň reflexie** – Žiaci prenikajú do podstaty matematiky, plánujú stratégie riešenia úloh, ktoré sú komplexnejšie a vyžadujú si originálny matematický prístup ako i spojenie rôznych metód.

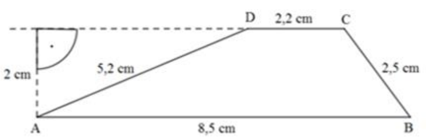
Metodológia výskumu

V príspevku sa zameriame na určenie úrovne geometrického myslenia žiakov končiacich nižšie stredné vzdelávanie a analýzu chýb troch geometrických úloh na rôznych kompetenčných úrovniach.

Výskum bol realizovaný v mesiacoch apríl – jún 2021. Výskumnú vzorku tvorili žiaci deviateho ročníka základnej školy, ktorí mali osvojené poznatky z celého tematického okruhu Geometria a meranie. Do výskumu sa zapojilo 29 základných škôl a výskumu sa zúčastnilo 760 žiakov.

K určeniu úrovne geometrického myslenia bol použitý van Hieleho geometrický test. Analyzované geometrické úlohy sú súčasťou nami navrhnutého testu matematických kompetencií v oblasti geometrie [7]. Prvá úloha Lichobežník (Obrázok 1) je na úrovni reprodukcie, druhá úloha Trojuholník (Obrázok 2) na úrovni prepojenia a tretia úloha Uhly (Obrázok 3) na úrovni reflexie.

Vypočítajte obvod a obsah lichobežníka ABCD na obrázku.

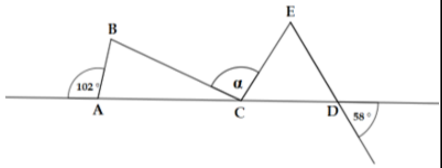


Obrázok 1: 1. úloha Lichobežník

Dĺžky strán trojuholníka ABC sú tri prirodzené čísla. Dve kratšie strany majú dĺžky $a = 6cm$ a $b = 8cm$. Určte dĺžku tretej strany tak, aby bol obvod trojuholníka čo najväčší.

Obrázok 2: úloha Trojuholník

Na obrázku sú dva rovnoramenné trojuholníky. Trojuholník ABC so základňou AB a trojuholník CDE so základňou CD. Akú veľkosť má uhol α?



Obrázok. 3: úloha Uhly

Geometrické myslenie a chyby v riešení geometrických úloh žiakov 9. ročníka základnej školy

Z výsledkov van Hieleho geometrického testu vyplýva, že najviac žiakov deviateho ročníka sa nachádza na úrovni vizualizácie (27,5 %). Očakávanú úroveň geometrického myslenia – t.j. aspoň úroveň analýzy dosahuje 50,5 % žiakov (úroveň analýzy 21,3 %, úroveň abstrakcie 24,2 % a úroveň dedukcie 5 %). Zarážajúcim zistením je, že 7,4 % žiakov sa nenachádza ani na úrovni vizualizácie. Žiadna úroveň geometrického myslenia nebola pridelená 14,6 % žiakom.

V porovnaní s podobnými výskumami na vekovo rovnakej vzorke žiakov v zahraničí, dosahujú vyššiu úroveň geometrického myslenia študenti Českej republiky zapojení do výskumu Haviger a Vojkůvková [8]. Vo výskume dosahuje očakávanú úroveň analýzy až 86,5 % študentov. Na druhej strane podľa Idris [9] len 26,2 % pätnásťročných žiakov z Malajzie sa nachádza aspoň na úrovni analýzy geometrického myslenia. Z výskumu Usiskin [4] vyplýva, že úroveň analýzy dosahuje 33 % študentov z USA. V Južnej Afrike podľa výskumu Abdelabu, Makgato, Ramiligera [10] sa na požadovanej úrovni nachádza len 5,7 % žiakov.

Úlohu Lichobežník vyriešilo správne 55 % žiakov, úlohu Trojuholník 32 % žiakov a úlohu Uhly 35 % žiakov. Napriek tomu, že úloha Uhly bola na úrovni reflexie matematických kompetencií, vyriešilo ju správne viac študentov ako úlohu Trojuholník na úrovni prepojenia. Úspešnosť riešenia úloh mohla byť ovplyvnená skúsenosťami žiakov. Žiaci sa pri príprave na Testovanie 9 a prijímacie skúšky na stredné školy stretávajú s úlohami podobnými ako je úloha Uhly.

V riešení geometrických úloh sme pozorovali nasledujúce chyby a miskoncepcie žiakov:

1. úloha Lichobežník: Žiaci nesprávne určili vzorec pre výpočet obsahu lichobežníka (napr. $S = a.b.c.d$, $S = a.v_a$, $S = (a.v_a)/2$, $S = a.b$), alebo do vzorca dosadili nesprávne hodnoty dĺžok strán alebo výšok lichobežníka.
2. úloha Trojuholník: V nesprávnom riešení žiaci najčastejšie pri výpočte dĺžky tretej strany využili Pytagorovu vetu alebo dĺžku tretej strany určili na základe postupnosti známych dĺžok strán.
3. úloha Uhly: Žiaci pri riešení úlohy nevedeli, ako určiť veľkosti susedných a vrcholových uhlov, ľubovoľné dva uhly vedľa seba, ktorých súčet veľkostí aj nie je 180°, považovali za susedné. Častou chybou žiakov bolo taktiež nesprávne určenie zhodných uhlov v rovnoramenných trojuholníkoch.

Záver

V príspevku sme sa zamerali na určenie úrovne geometrického myslenia žiakov končiacich nižšie stredné vzdelávanie. Napriek tomu, že žiaci majú problémy s riešením geometrických úloh v Testovaní 9 alebo v PISA testovaní, ich úroveň geometrického myslenia je porovnateľná alebo vyššia ako úroveň ich rovesníkov v iných krajinách. Problémy s riešením geometrických úloh môžu spôsobovať slabé skúsenosti žiakov s riešením úloh rôzneho typu. Ako sme mohli na základe úspešnosti riešenia jednotlivých úloh pozorovať, žiaci riešili s vyššou úspešnosťou úlohy, s ktorými sa pravidelne stretávali na hodinách matematiky. Z uvedeného vyplýva, že je nevyhnutné, aby sa žiaci na hodinách matematiky zaoberali rôznymi geometrickými úlohami na rôznych kompetenčných úrovniach.

LITERATÚRA

[1] Hardianti, D., Priatna, N., Priatna, A.: Analysis of Geometric Thinking Students' and Process Guided Inquiry Learning Model. *Journal of Physics Conference Series, 2017,* 895(1), str. 1 - 7.

[2] Fisher, J.: *Geometric thinking concept map.* Assessment resource banks, 2015. Dostupné na: [https://arbs.nzcer.org.nz/geometric-thinking-concept-map#vanhiele].

[3] Pavlovičová. G., Barcíková. E.:Investigation of geometrical thinking of pupils at the age of 11 to 12 through solving tasks. In: *Proceeding of SEMT´ 13: Tasks and tools in elementary mathematics,* Praha, Pedagogická fakulta Karlovej univerzity, 2013, str. 228 – 237.

[4] Usiskin, Z.: *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry,* Chicago, The university of Chicago, 1982.

[5] Šedivý, O. a kol.: *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky,* Nitra, Univerzita Konštantína Filozofa, 2013, ISBN: 978-80-558-0438-5.

[6] OECD PISA: *Assessment Framework - Key competencies in reading, mathematics and science*, 2009. Dostupné na internete: [http://www.oecd.org/dataoecd/11/ 40/44455820.pdf].

[7] Bočková, V.: *Matematické kompetencie a úroveň geometrického myslenia žiakov nižšieho stredného vzdelávania*, rigorózna práca, 2021.

[8] Haviger, J., Vojkůvková, I: The van Hiele geometry thinking levels: gender and school type differences. In: *International Conference on Education & Educational Psychology,* Antalya: Elsevier Ltd, 2013, ISSN: 1877-0428.

[9] Idris, N.: The Impact of Using Geometers' Sketchpad on Malaysian Students' Achievement and Van Hiele Geometric Thinking, *Journal of Mathematics Education.* 2009, 1(2), str. 169-180.

[10] Adelabu, F. M., Makgato, M., Ramaligela M. S.: Enhancing Learners' Geometric Thinking Using Dynamic Geometry Computer Software. *Journal of Technical Education and Training*, 2019, 11(1), str. 44-53.

PaedDr. Veronika Bočková, doc. PaedDr. Gabriela Pavlovičová, PhD.
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Trieda Andreja Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: veronika.bockova@ukf.sk, gpavlovicova@ukf.sk

TO, ČO ŽIACI NEVEDIA Z MATEMATIKY

LUCIA CSACHOVÁ

ABSTRAKT. *Príspevok je stručným zhrnutím projektu „Analýza kritických miest v školskej matematike a identifikácia faktorov ovplyvňujúcich postoj žiakov k matematike" (VEGA 1/0079/19). V projekte sme na základe výsledkov žiakov v testovaní T9 z matematiky identifikovali a analyzovali oblasti školskej matematiky, v ktorých žiaci zlyhávajú a to aj opakovane. Poznať tieto kritické miesta školskej matematiky je dôležitým krokom pre zlepšenie úrovne matematických kompetencií našich žiakov. Takže: ČO naši žiaci vlastne nevedia?*

Jeden z cieľov testovania T9 a kritické miesta školskej matematiky

Nie veľmi dobré výsledky slovenských žiakov z matematiky nielen v národných a medzinárodných testovaniach, ale i častokrát slabá pripravenosť študentov na štúdium STEM disciplín v rámci vysokoškolského štúdia upozorňujú na potrebu zmien v školskej matematike v rámci celej základnej i strednej školy. Oblasti matematiky, v ktorých žiaci nedosahujú dostatočnú úroveň a v ktorých sa táto nedostatočnosť často a opakovane prejavuje, sú nazývané napr. v [1] *kritickými miestami školskej matematiky.*[10] Ak učiteľ o týchto kritických miestach vie, tak im môže venovať viac času vo vzdelávacom procese, prípadne zmeniť k nim rokmi zaužívaný prístup.

Jedným z cieľov celoslovenského testovania T9 je ohodnotiť zručnosti, vedomosti a kompetencie žiakov na výstupe z danej úrovne vzdelávania (ISCED 2), resp. ohodnotiť ich pripravenosť na vstupe pre ďalšiu úroveň (ISCED 3). Výsledky žiakov z matematiky v T9 v jednotlivých rokoch i za dlhšie obdobie ukazujú, že žiaci v niektorých oblastiach matematiky opakovane zlyhávajú. Práve preto údaje rôzneho charakteru o jednotlivých úlohách a tematických okruhoch v T9 za obdobie 2015 – 2019 predstavovali hlavný zdroj vstupných informácií pre náš výskumný projekt, ktorého cieľom bolo identifikovať a analyzovať kritické miesta školskej matematiky na Slovensku.

Príspevok je stručným zhrnutím kvalitatívnej časti z pripravovanej publikácie *Kritické miesta školskej matematiky*, ktorá bude výstupom v projekte VEGA 1/0079/19.

Kritické miesta školskej matematiky na Slovensku

Každoročne bolo v T9 zaradených 20 testových úloh z matematiky, od roku 2019 bol ich počet zvýšený na 30. Úlohy sú rozdelené podľa prevládajúcej témy a testovaného poznatku do jedného z piatich tematických okruhov v súlade s inovovaným Štátnym vzdelávacím programom: 1. Čísla, premenná, počtové výkony s číslami, 2. Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy, 3. Geometria a meranie, 4. Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika, 5. Logika, dôvodenie, dôkazy.

Na základe obťažnosti úloh z T9 počas sledovaného päťročného obdobia, ich neriešenosti a kvalitatívnej analýzy riešení úloh sme stanovili pre jednotlivé okruhy pravdepodobné kritické miesta:

- *Čísla, premenná, počtové výkony s číslami*:
  zaokrúhľovanie prirodzených čísel na desiatky, stovky, tisícky, ..., zaokrúhľovanie

[10] Podľa (Rendl, Vondrová, 2013, str. 7-8) sa pod kritickými miestami matematiky chápu: „... oblasti, v nichž žáci často a opakovaně selhávají, jinak řečeno, která nezvládnou na takové úrovni, aby se jejich matematická gramotnost produktivně rozvíjela a také aby mohla být tvořivě užívána v každodenním životě.“

desatinných čísel na požadovaný počet desatinných miest, zlomky a operácie so zlomkami,

- *Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy:*
  výrazy, rovnice a nerovnice, pomer, priama a nepriama úmernosť, percentá,
- *Geometria a meranie:*
  premena jednotiek, obsah a obvod rovinných útvarov, povrch a objem telies, Pytagorova veta,
- *Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika:*
  požiadavka na konfiguráciu, nesystematickosť vypisovania možností, nepochopenie vzťahu pre výpočet pravdepodobnosti udalosti, výpočet aritmetického priemeru, čítanie údajov z grafov a tabuliek.

Do okruhu O5 *Logika, dôvodenie, dôkazy* bolo v sledovanom období zaradených málo úloh – každý rok len po jednej, okrem roku 2018 s úlohami dvoma. Problémy, ktoré žiaci s úlohami z tohto okruhu mali, sa však netýkali logiky, ale kontextu, v ktorom bola umiestnená úloha (napr. geometrický kontext).

Záver

Medzi ciele hodnotenia vo vzdelávacom procese patrí aj spätná väzba pre učiteľov. To by malo platiť aj pre testovanie T9 a jeho výsledky. V našom výskume sme sa pozreli na to, čo žiaci z T9 nevedeli jednorazovo alebo i opakovane, a vytýčili sme kritické miesta školskej matematiky. Na tieto oblasti školskej matematiky upozorňujeme našich študentov, aby boli pripravení do praxe. Pretože poznať tieto kritické miesta školskej matematiky je dôležitým krokom pre zlepšenie úrovne matematických kompetencií našich žiakov a skvalitnenie vzdelávacieho procesu

Príčinou vzniku kritických miest v školskej matematike je často nedostatočná propedeutika témy, nedostatok alebo absencia modelov v poznávacom procese, nedostatočne vybudovaný poznatok, formalizmus poznatkov, nízka úroveň čítania s porozumením či dril.

Poďakovanie: Článok vznikol s podporou projektu VEGA 1/0079/19 (*Analýza kritických miest v školskej matematike a identifikácia faktorov ovplyvňujúcich postoj žiakov k matematike*). Za poskytnutie údajov a zadaní úloh ďakujeme NÚCEM-u.

LITERATÚRA

[1] Rendl, M., Vondrová, N. a kol.: Kritická místa matematiky na základní škole očima učitel, Praha: PedF, Univerzita Karlova, 2013, ISBN 978-80-7290-723-6

[2] Testovanie T9, 2015 – 2019. dostupné: www.nucem.sk

RNDr. Lucia Csachová, PhD.
Katolícka univerzita v Ružomberku
Hrabovská 1
034 01 Ružomberok
e-mail: lucia.csachova@gmail.com

AKTIVITY S CELOČÍSELNÝMI ŠTVORCAMI PRI ONLINE VYUČOVANÍ

VIERA ČERŇANOVÁ

ABSTRAKT. Príspevok prináša stručné informácie o niektorých aplikáciách vhodných pre online vyučovanie matematiky. Tieto sú doplnené o odkazy na zdroje dostupné na internete, ktoré môžu učiteľom pomôcť pri používaní uvedených aplikácií. Online prácu v skupinách ilustrujeme na troch aktivitách s prirodzenými číslami.

Úvod

Uplynulé obdobie si vynútilo presun vyučovania zo škôl do online prostredia. Toto prostredie otvára nové možnosti, ktoré kontaktná prezenčná výuka neposkytuje. Odhliadnuc od potreby technického vybavenia, pre učiteľov je mimoriadne náročné prejsť na nový spôsob vyučovania a zároveň disponovať databázou nápadov, ako v triede udržať tvorivého ducha a spoluprácu žiakov pri riešení úloh. Cieľom tohto príspevku nie je vyhodnocovať výhody či nevýhody toho-ktorého spôsobu vyučovania, ale ponúknuť učiteľom podnety.[11]

Uvedené aktivity sú inšpirované úlohou „Koliesko“, ktorá je prevzatá zo stránky [1]. Na prvý pohľad nevyžaduje žiadne špeciálne matematické vedomosti. Stačí vedieť sčitovať a poznať druhé mocniny malých prirodzených čísel, čím je uchopiteľná aj pre žiakov základných škôl. Nie je to však rutinný problém: poznáme východiskovú situáciu a cieľ, ale cestu k cieľu nepoznáme (Kopka [2]). Vyriešenie úlohy si vyžaduje hľadanie adekvátnej stratégie.

Niektoré aplikácie vhodné pre online vyučovanie matematiky

Microsoft Teams

Jednou z aplikácií, ktorú používajú pre online vyučovanie mnohé školy, je MS Teams. Hoci aplikácia existuje už niekoľko rokov a Microsoft ju ešte pred rokom 2020 ponúkal svojim používateľom, skutočný boom zaznamenala až počas opatrení spojených so zatvorením škôl. Niektoré školy zabezpečili pre svojich učiteľov úvodný kurz, inde to bolo ponechané na vlastné hľadanie učiteľov. Táto i ďalšie aplikácie určené pre skupinovú online komunikáciu prešli za posledné dva roky prudkým vývojom. Vývojári ich naďalej vylepšujú a prispôsobujú novým potrebám. Preto je osožné mať poruke pomocníka v zrozumiteľnom jazyku aj v prípade, že učiteľ patrí medzi pokročilých užívateľov aplikácie. Vynikajúcim pomocníkom pre používateľov MS Teams sú rady a námety, ktoré uvádza na svojom blogu [3] Karel Klatovský.

Jednou z užitočných funkcionalít MS Teams je vytváranie skupín počas schôdze. V skupine môžu žiaci spolu komunikovať a riešiť spoločné zadanie, pričom nerušia členov inej skupiny. Učiteľ má možnosť vstupovať do skupín a komunikovať s členmi. Má tiež možnosť komunikovať prostredníctvom četu s tou-ktorou skupinou, prípadne so všetkými skupinami zároveň prostredníctvom spoločného četu v tíme.

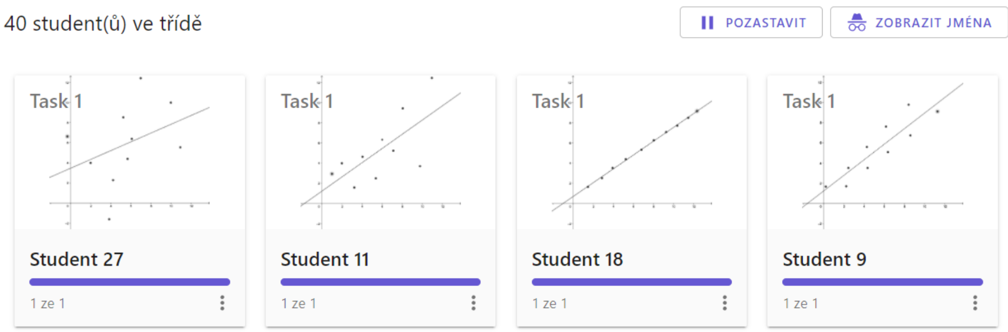
GeoGebra

Počas schôdze otvorenej v MS Teams môžu účastníci zároveň interaktívne používať iné aplikácie, pričom naďalej komunikujú prostredníctvom MS Teams. Takúto možnosť poskytuje pri vyučovaní matematiky napríklad GeoGebra.

[11] Tento príspevok vznikol v rámci projektu KEGA 001UMB-4/2020.

Osobitne príťažlivá je GeoGebra Classroom (trieda):

- Učiteľ si vytvorí na stránke [4] konto.
- Následne tam vloží aktivitu ako .ggb súbor, ktorý sám vytvoril, prípadne prevezme a vloží voľne dostupnú aktivitu iného autora zverejnenú na stránke [4].
- Z tejto aktivity vytvorí „triedu“.
- Aplikácia automaticky pridelí takto vytvorenej triede jedinečné heslo.
- Učiteľ zverejní toto heslo svojim žiakom napríklad tak, že ho vloží do četu v tíme. Pomocou hesla sa žiaci prihlásia do triedy a môžu pracovať na pridelenej úlohe.
- Učiteľ vidí na svojej obrazovke v reálnom čase činnosť všetkých prihlásených žiakov súčasne. Má tiež možnosť vstúpiť do prostredia hociktorého žiaka. Toto je užitočné napríklad vtedy, ak sa žiakovi nedarí – učiteľ môže vidieť „zvnútra“, v čom je problém. Žiak pritom nevie, že učiteľ vstúpil do jeho prostredia, ani nevidí kroky, ktoré učiteľ urobil.



Obrázok 1

Začiatkom roku 2021 založil Mgr. Jozef Zvolenský, učiteľ na ZŠ Skýcov a víťaz špeciálneho ocenenia za online vzdelávanie od Nadácie Dionýza Ilkoviča za r. 2020, facebookovú skupinu *GeoGebra v škole*. Členovia skupiny sú učitelia matematiky na rôznych stupňoch vzdelávania, prípadne študenti učiteľstva. Skupina realizovala niekoľko webinárov, ktoré sú dostupné na youtube kanáli s rovnakým názvom. Mgr. Zvolenský vytvoril tiež skupinu *GeoGebra v škole* [5]. Členovia tejto skupiny systematicky vytvárajú a sústreďujú na tomto mieste materiály vhodné pre vyučovanie matematiky v jednotlivých ročníkoch ZŠ alebo SŠ. Tieto materiály sú dostupné po zaregistrovaní do skupiny. Niektoré z nich sú voľne dostupné na domovskej stránke [4], tak ako mnoho ďalších súborov od iných autorov.

Microsoft Excel, Word, PowerPoint online

Počas schôdze tímu (ale aj nezávisle od schôdze) môžeme vložiť do četu súbor vytvorený v niektorom programe Microsoftu. V tomto prostredí môžu spolupracovať viacerí členovia tímu zároveň. Na rozdiel od GeoGebry vidia všetci, ktorí vstúpia do príslušného prostredia (otvorili súbor), kto ďalší „je v súbore“. Vidia tiež zmeny či úpravy, ktoré urobili alebo práve robia ostatní účastníci. Počas našich online seminárov mali študenti veľkú radosť, keď boli takto virtuálne spolu a všetci naraz sa mohli nejakým spôsobom aktívne prejaviť.

Aktivity s číslami

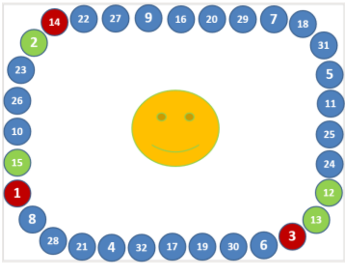
Aktivita Koliesko prevzatá zo zdroja [1] sa ukázala byť veľmi inšpiratívnou, dala vznik ďalším aktivitám.

Koliesko

ZADANIE: *Usporiadajte čísla 1, 2, ..., 32 do kruhu tak, aby ste každé z nich použili práve raz, a aby bol súčet každých dvoch susedných čísel druhou mocninou prirodzeného čísla.*

Vďaka svojej nenáročnosti na matematický aparát pôsobí táto úloha jednoducho, čím môže zaujať široké spektrum riešiteľov. Pokiaľ ide o spôsob realizácie, odporúčam riešiť ju vo dvojiciach alebo v malých skupinách, hoci je možné aj samostatné riešenie. Pri online vyučovaní môžu skupinky používať ako prostredie spoločný súbor Skicár, pdf, Word ... Výhodou je, ak učiteľ alebo niekto zo žiakov vopred pripraví súbor s vloženými krúžkami či inými útvarmi s označením 1, 2 až 32 a tento súbor poskytne každej skupine.

So študentmi učiteľstva na Pedagogickej fakulte Trnavskej univerzity sme úlohu riešili vo dvojiciach. Ukázalo sa, že to bola dobrá voľba. Keďže úloha nie je taká triviálna, ako sa javí, hneď na začiatku som upresnila ciele: Nie je podstatné nájsť riešenie, ale zapísať si čo najviac pozorovaní – na čo ste prišli, keď ste sa pokúšali úlohu vyriešiť. Takisto pri mladších žiakoch a študentoch odporúčam stanoviť nejaké pomocné ciele. Riešenie samotnej úlohy totiž vyžaduje pomerne veľa času a úsilia. Obľúbená stratégia „pokus-omyl“ má v tomto prípade malú šancu na rýchle nájdenie riešenia. Opakovaný neúspech by mohol žiakov znechutiť.



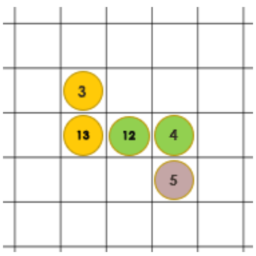
Obrázok 2: Koliesko, autor Pavol Daňo 2021, 2. ročník M-I

Pre riešiteľov matematickej olympiády vyšších kategórií alebo pre učiteľov je možné túto úlohu formulovať ako hľadanie Hamiltonovskej kružnice v grafe, kde:

- vrcholy sú označené 1 až 32;
- dva vrcholy sú susedné (t.j. incidujú s tou istou hranou) práve vtedy, ak je súčet príslušných čísel druhou mocninou prirodzeného čísla.

Číselné Scrabble

ZADANIE: *Na štvorčekovú hraciu plochu vkladajte čísla 1, 2, ... , 32 podobne ako pri Scrabble, a to tak, aby bol súčet každých dvoch susedných čísel druhou mocninou prirodzeného čísla. Pritom za susedné čísla považujeme také, ktoré sú umiestnené v políčkach so spoločnou stranou.*



Obrázok 3: Číselné Scrabble

Táto aktivita je didaktickou hrou. Pri formulovaní pravidiel sa nekladú medze, je však nevyhnutné, aby sa pravidlá dohodli vopred.

Pri jednoduchej variante hry sú žiaci rozdelení do skupín po štyroch. Každá dostane súbor (napr. excelovský hárok), v ktorom sú čísla 1-32 rozdelené do štyroch skupiniek po osem. Okrem toho je v súbore vymedzené hracie pole s vyznačeným stredným políčkom. Každý žiak dostane niektorú skupinku ôsmich čísel. Prvý hráč sa určí podľa vopred dohodnutého kľúča. Ten môže ale nemusí súvisieť s hrou, napríklad: prvý v abecednom poradí, žiak s najskorším dátumom narodenia v roku, hráč s najväčším počtom „štvorcov" vytvorených z pridelených čísel ... Potom v hre nasleduje hráč tak, ako je to zvyčajné v iných stolových hrách. Prideľovanie bodov za jednotlivé ťahy je takisto potrebné dohodnúť vopred, napríklad: v danom ťahu sa hráčovi započítajú všetky „štvorce", ktoré priložením niektorého svojho čísla / čísel vytvoril, a to v číselnej hodnote tých štvorcov. Hra končí, keď už žiaden hráč nemôže vytvoriť nový štvorec. Hráčom sa od nadobudnutých bodov odpočítajú hodnoty čísel, ktoré nedokázali použiť.

Pri hraní online môžu všetci štyria žiaci v skupine robiť zmeny v zdieľanom súbore, vidieť ťahy súperov v reálnom čase, komunikovať, hrať sa spolu.

Trojičky

ZADANIE: *Nájdite niekoľko trojíc navzájom rôznych prirodzených čísel a, b, c, kde každý súčet $a+b,\ b+c,\ c+a$ je druhou mocninou prirodzeného čísla.*

Pri Koliesku sú riešitelia spočiatku motivovaní a rýchli, pretože sa im darí vytvoriť sľubne dlhého „hadíka". Problém nastane vtedy, keď hadíka nevedia dokončiť a uzavrieť do kruhu. Pri Trojičkách môžu prísť ťažkosti už na začiatku. Riešitelia rýchlo postrehnú, že dosiahnuť dva „štvorcové" súčty je pomerne jednoduché, pričom však tretí súčet nie je štvorcom. Preto je opäť vhodné predložiť žiakom niekoľko pomocných cieľov:

– poznačte si, čo tie tri čísla a, b, c musia spĺňať,
– aké trojice čísel a, b, c istotne nebudú vyhovovať,

a podobne.

Tak ako Koliesko, aj táto úloha je vhodná pre dvojice, pre malé skupinky i samostatnú prácu. Osobne sa pri aktivite Trojičky prikláňam k troj- až štvorčlenným skupinkám, pretože najpravdepodobnejší spôsob riešenia „pokus-omyl" vyžaduje veľa priebežných výpočtov.

LITERATÚRA

[1] https://brainly.in/question/32595343

[2] Kopka, J.: *Hrozny problémů ve školské matematice*. Ústí nad Labem, UJEP Ústí nad Labem, 1999, ISBN 80-7044-247-6

[3] https://www.klatovsky.cz/2020/

[4] www.geogebra.org

[5] https://www.geogebra.org/group/stream/id/VFP3acCbv

RNDr. Viera Čerňanová, PhD.
Katedra matematiky a informatiky
Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity
Priemyselná 4
SK – 918 43 Trnava
e-mail: vieracernanova@hotmail.com

AKTIVITA S CELOČÍSELNÝMI ŠTVORCAMI
(PRACOVNÁ DIELŇA)

VIERA ČERŇANOVÁ

ABSTRAKT. *Príspevok zaznamenáva obsah pracovnej dielne, opis príslušného materiálneho prostredia, výstup vo forme pozorovaní účastníkov, ako i súbor návodných úloh.*

Úvod

Pracovná dielňa bola prezenčnou realizáciou aktivít uvedených v krátkom príspevku *Aktivity s celočíselnými štvorcami pri online vyučovaní* na konferencii Dva dni s didaktikou matematiky 2021. Druhá dielňa s rovnakou náplňou sa uskutočnila na seminári z predmetu *Metódy riešenia matematických úloh* na Pedagogickej fakulte Trnavskej univerzity. Keďže aktivity boli časovo náročné, účastníkom dielní sa vo vyhradenom čase podarilo zaoberať iba jednou z nich, Kolieskom. V pozorovaniach sú zachytené výstupy z obidvoch dielní bez rozlíšenia pôvodu.[12]

Aktivita Koliesko

ZADANIE: *Usporiadajte čísla 1, 2, ... , 32 do kruhu tak, aby ste každé z nich použili práve raz, a aby bol súčet každých dvoch susedných čísel druhou mocninou prirodzeného čísla.*

Úloha je prevzatá zo zdroja [1]. Má iba jedno riešenie, ktoré znázorňuje Obrázok 1, a to až na smer (pravotočivé resp. ľavotočivé zoradenie čísel).

Obrázok 1: Koliesko [1]

Pracovné skupiny

Aktivity je možné riešiť individuálne alebo v malých skupinách. Druhá možnosť je zaujímavejšia, keďže členovia skupiny sa svojimi nápadmi obohacujú a bezprostredne ich môžu navzájom overiť. Skupiny, v ktorých je ochota spolupracovať, vo všeobecnosti napredujú rýchlejšie než jednotlivci.

Pracovnej dielne sa na konferencii zúčastnilo 9 učiteľov a doktorandov, aktivitu riešili v troch skupinách po troch členoch. Druhá pracovná dielňa (seminár) mala 8 účastníkov – študentov učiteľstva, ktorí pracovali vo dvojiciach. Traja študenti, ktorí sa pripojili na seminár online, riešili samostatne.

---

12 Tento príspevok vznikol v rámci projektu KEGA 001UMB-4/2020.

Materiálne prostredie

Materiálne prostredie má materiálnu, kognitívnu a sociálnu zložku. Posledná z nich je opísaná vyššie. Patria do nej účastníci pracovnej dielne vrátane inštruktorky.

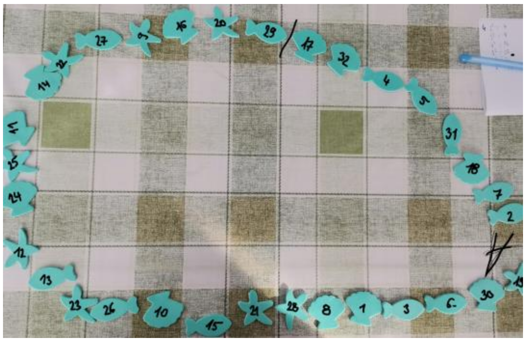
Kognitívna zložka

Sem zaraďujeme vedomosti a poznatky účastníkov-riešiteľov. Tie v obidvoch dielňach nepochybne prevyšovali potrebnú úroveň v oblastiach:

- sčitovanie celých čísel od 1 do 32,
- celočíselné druhé mocniny menšie ako 64.

Materiálna zložka

Všetky skupiny dostali po 32 malých farebných penových útvarov, každá skupina inú farbu. Dostali tiež papiere, potrebovali aj perá.



Obrázok 2: Koliesko, pokus

Členovia skupín napísali na jednotlivé útvary čísla 1 až 32. Potom sa pustili do riešenia. Samotné vyriešenie úlohy Koliesko však nebolo hlavným cieľom aktivity.

Pokyny pre účastníkov

Počas svojho pôsobenia medzi študentmi učiteľstva matematiky pre 2. a 3. stupeň vzdelávania pozorujem, že mnohí z nich radi riešia neštandardné matematické úlohy. Tie sa nejakým spôsobom vymykajú z bežnej schémy a riešiteľ musí hľadať vhodnú stratégiu. Na tejto záľube je možné stavať a pomáhať študentom pri budovaní ich pedagogických zručností tým, že budú:

- pokúšať sa riešiť úlohu z pozície žiaka istého ročníka ZŠ,
- zaznamenávať si pozorovania a rozhodovať, ktoré z nich by mohol urobiť aj žiak,
- formulovať k danej náročnej úlohe návodné úlohy

a podobne.

Preto dostali účastníci obidvoch pracovných dielní pokyny v podobnom duchu.

Pozorovania

Cieľom pracovnej dielne bolo ponúknuť inšpiráciu pre učiteľov a budúcich učiteľov, nie posudzovať oprávnenosť pozorovaní alebo zvolenej stratégie. Cieľom nebolo ani žiadne štatistické vyhodnocovanie. Preto sú pozorovania zapísané ako jednoduchý zoznam.

Účastníci napísali:

- výsledné druhé mocniny sa musia opakovať
- najväčší možný štvorec je 49 a najmenší 4
- možné mocniny sú 4,9,16,25,36 a 49
- na získanie súčtu 4 je iba jedna možnosť 4=1+3
- vytváranie dvojíc, ktorých súčtom je štvorec, je dobré, ale nevedie nutne k riešeniu
- vytvoriť „hadíka“ je podstatne jednoduchšie ako zoradiť čísla do kruhu
- hadíkov existuje veľa, kruh iba jeden
- niektoré čísla majú presne dané, s ktorými číslami musia susediť

Pri hľadaní úspešnej stratégie sa takmer všetky skupiny vo vyhradenom čase dopracovali k tomu, že:

- metóda „pokus-omyl“ má mizivú šancu na úspech
- je rozumné hľadať susedov najväčších čísel 32, 31, ... , 25, pretože tie môžu vytvoriť štvorec iba s dvomi spomedzi daných čísel; príslušné trojice sú vo výslednom kruhu nevyhnutné (napr. 4-32-17 resp. 17-32-4)
- vhodné systematické riešenie sa odvíja od „nevyhnutných trojíc“
- vytváranie reťazcov spájaním nevyhnutných trojíc urýchľuje nájdenie riešenia
- tabuľka s trojicami ku každému číslu a vyškrtávanie použitých trojíc pomáha

Návodné úlohy

Jednoduchý spôsob, ako vytvoriť hneď niekoľko návodných úvod, je použiť vyššie uvedené pozorovania. Z nich je možné sformulovať nasledujúce úlohy, pričom pracujeme s množinou čísel A={1, 2, ..., 32}. Vyjadrenia a+b, b+a považujeme za ten istý spôsob.

1. Vypíš všetky druhé mocniny od 1 do 100.
2. Koľkými spôsobmi je možné získať číslo 1 ako súčet dvoch čísel z A?
3. Koľkými spôsobmi je možné získať číslo 4 ako súčet dvoch čísel z A?
4. Koľkými spôsobmi je možné získať číslo 4 ako súčet dvoch rôznych čísel z A?
5. Koľkými spôsobmi je možné získať číslo 49 ako súčet dvoch čísel z A?
6. Ktorú najmenšiu a ktorú najväčšiu druhú mocninu je možné vytvoriť ako súčet dvoch rôznych čísel z A?
7. Ktoré druhé mocniny je možné vytvoriť ako súčet dvoch rôznych čísel z A?
8. S ktorými číslami z A dáva číslo 32 taký súčet, ktorý je druhou mocninou?
9. Ktoré čísla z A dávajú súčet, ktorý je druhou mocninou, práve s dvomi inými číslami z A? Vypíš ich.
10. Vytvor hadíka z piatich rôznych čísel z A, pričom súčet každých dvoch za sebou nasledujúcich čísel je druhou mocninou.

Analogické úlohy vytvoríme s inou množinou čísel.

LITERATÚRA

[1] https://brainly.in/question/32595343

RNDr. Viera Čerňanová, PhD.
Katedra matematiky a informatiky
Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity
Priemyselná 4, SK – 918 43 Trnava
e-mail: vieracernanova@hotmail.com

FINANČNÁ GRAMOTNOSŤ

MONIKA DILLINGEROVÁ

ABSTRAKT. *Zaujímavosti z webinárov na tému finančná gramotnosť.*

Finančná gramotnosť

Už od roku 2008 sa začína prejavovať snaha o zvyšovanie finančnej gramotnosti žiakov stredných a základných škôl. Táto vyústila do vytvorenie stratégie vzdelávania vo finančnej oblasti a manažmentu osobných financií vo forme národného štandardu finančnej gramotnosti. Postupne ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky (MŠVVaŠ SR) vytvorilo tri verzie. Pritom nová vždy nahrádzala staršiu a momentálne je od 1.9.2017 platná verzia 1.2.

Ako hovorí definícia z Národného štandardu finančnej gramotnosti.(MŠVVaŠ SR, 2017): „Finančná gramotnosť je schopnosť využívať poznatky, zručnosti a skúsenosti na efektívne riadenie vlastných finančných zdrojov s cieľom zaistiť celoživotné finančné zabezpečenie seba a svojej domácnosti."

Pritom riadenie vlastných finančných zdrojov chápeme ako súbor viacerých schopností. Finančne gramotný človek by mal vedieť nájsť, vyhodnotiť a použiť finančné informácie. Tiež má poznať základné pravidlá riadenia financií, rozoznávať riziká v riadení financií, efektívne používať finančné služby, orientovať sa v oblasti finančného trhu (Národná banka Slovenska, komerčné banky, poisťovne, finanční sprostredkovatelia a ostatné finančné inštitúcie), orientovať sa v problematike ochrany práv spotrebiteľa a byť schopný tieto práva uplatňovať. Pre celoživotné finančné zabezpečenie seba a svojej domácnosti si musí v prvom rade stanoviť finančné ciele. Tie sa však dajú stanoviť iba ak má prehľad o možnostiach a schopnostiach. Na základe ich poznania potom môže plánovať dosiahnutie svojich finančných cieľov. Úzko skĺbená s uvedeným je teda schopnosť rozvinúť potenciál získania vlastného príjmu a schopnosť sporiť. V priebehu života musí zohľadniť aj plnenie svojich finančných záväzkov. Nikto nechce počas plnenia akéhosi vzdialeného cieľa stagnovať, preto je nutné zveľaďovať a chrániť svoj aj zverený majetok, s čím je prepojené aj porozumenie a orientovanie sa v zabezpečovaní základných ľudských a ekonomických potrieb jednotlivca a rodiny, podniku. Ak si pre plnenie cieľov zvolí cestu podnikania, musí ovládať práva, povinnosti, klady a riziká osoby fungujúcej ako podnikateľ, a samozrejme musí vedieť zostaviť a prezentovať vlastný podnikateľský zámer, myslieť strategicky, analyzovať a riešiť problémy.

S ohľadom na uvedené potreby a v súlade s národným štandardom finančnej gramotnosti verzia 1.2 sme pripravili s vydavateľstvom ABCedu publikácie ´vo forme pracovných učebníc: Financie v praxi A a Financie v praxi B, ktoré už majú aj odporúčaciu doložku MŠVVaŠ SR. Ďalšie dve publikácie (Financie v praxi C a Financie v praxi D) sú v stave rozpracovania. Finančná gramotnosť sa nedá študovať na žiadnej univerzite ako aprobačný predmet, lebo nie je predmetom ani na školách. Aby sa teda učitelia o takejto publikácii dozvedeli, vedeli s ňou pracovať, prípadne sami niečo zistili, sme začali hneď k prvej publikácii robiť školenia pre učiteľov. S príchodom pandémie ochorenia Covid 19 sa naše školenia pretransformovali do podoby webinárov. Pre oživenie a vnesenie interakcie do webinárov som pre učiteľov pripravila krátky dobrovoľný testík v prostredí kahoot.

Ako to dopadlo

Samotný test pozostával zo 7 otázok. Boli dvoch typov: výber odpovede a true-false. Otázky obsahovali vedomosti, ktoré sa žiaci zo spomínaných publikácií dozvedia, ale náš predpoklad bol, že učitelia tieto vedomosti z bežného života majú. Navyše test bol zadávaný až po úvode, kde bolo vysvetlené, čomu sa pracovné učebnice venujú. Teda účastníci mali akúsi predstavu, čo ich môže čakať. Nakoľko vyplnenie testu bolo dobrovoľné, nie všetci účastníci kurzu tak urobili. Celkovo však máme 168 odpovedí od učiteľov z rôznych regiónov Slovenska. (Všetky uvádzané % boli vypočítané z celku 168 a zaokrúhlené na celé čísla.)

Test

Otázka č. 1

Medzi prvé platidlá patria aj:

a) Drevo
b) Obilie
c) Gaštany
d) Ulity

Otázka č. 2

Ktorá z uvedených mincí je najťažšia?

a) 50 c
b) 1 €
c) 20 c
d) 5 €

Otázka č. 3

Akú farbu má 200-eurová bankovka?

a) oranžová
b) hnedá
c) žltá
d) zelená

Otázka č. 4

Eurom sa platí v Estónsku

True
False

Otázka č. 5

Eurom sa platí na Ukrajine

True
False

Otázka č. 6

Ktorá krajina má správne uvedenú svoju terajšiu menu?

a) LV Rumunsko
b) ₣ Francúzsko
c) £ Veľká Británia
d) € Česko

Otázka č. 7

Ak vám zamestnávateľ sľúbi plat 650 € a osobné ohodnotenie 50 – 100 €, dostanete v čistom...

a) 650 – 750 €
b) 550 – 600 €
c) 600 – 650 €
d) 500 – 550 €

Výsledky

V učebniciach sa zaoberáme vývojom obchodu z pohľadu platenia. Teda začíname výmenným obchodom, prechádzame cez univerzálne platidlá k peniazom a bezpeňažnému platobnému styku. Na toto bola zameraná prvá otázka.

Správnu odpoveď – ulity, volilo iba 32 % respondentov. Väčšina učiteľov (53 %) bolo presvedčených, že to bolo obilie. V tomto prípade sme poukazovali na trvácnosť platidla a pre tých, ktorí chceli platiť drevom sa ako logický argument proti javila problematickosť transportu takéhoto platidla na trh a z trhu.

V druhej a tretej otázke sme sa zamerali na našu dnešnú menu. V týchto otázkach nás prekvapila disproporcia správnych odpovedí. Boli sme presvedčení, že každý pozná mince a uvedomuje si, že 50-centová minca je väčšia, a teda aj ťažšia ako 1-eurová. Na druhú stranu 200-eurová bankovka nie je častý zjav a náš predpoklad bol zvýšená chybovosť v tejto otázke. Výsledky sú viditeľné v tabuľke č. 1 nižšie. Správna odpoveď je podfarbená.

1 €	130	77%	žltá	98	58%
50 c	41	24%	oranžová	24	14%
20 c	3	2%	zelená	27	16%
5 €	8	5%	hnedá	21	13%
bez odpovede	4	2%	bez odpovede	16	10%

Tabuľka 1: vyhodnotenie ot.2 a 3

Otázky 4 a 5 sa venovali menám v krajinách EÚ. Tu sa prejavilo, že Estónsko je pre nás vzdialená krajina – nemáme spoločnú hranicu. Správne sa rozhodlo 55 % opýtaných, nesprávne 43 % opýtaných. O Ukrajine ako našom susedovi toho vieme podstatne viac a správnu odpoveď volilo až 87 % respondentov.

Menám a európskej menovej únii sme sa venovali ešte aj v otázke č. 6. Tu sme sa však zamerali na európske krajiny, ktoré sú respondentom bližšie. To sa aj prejavilo v 72 % správnych odpovedí.

Posledná otázka sa venovala odhadu čistej mzdy. Zámerne sme volili plat blízky ale nižší ako plat respondentov. Prekvapivo iba 41 % učiteľov malo dobrý odhad. Prekvapili najmä tí, ktorí označili možnosť 650 – 750 €, teda vôbec nezohľadnili pojem „v čistom".

500 - 550 €	45	27%
550 - 600 €	69	41%
600 - 650 €	20	12%
650 - 750 €	26	15%
bez odpovede	11	7%

Tabuľka 2: vyhodnotenie ot.7

Závery

Z našich zistení sa domnievame, že finančná gramotnosť je vhodná téma aj pre učiteľa. Určite by mal poznať historický pohľad na platenie. Až z neho sa odvíja porozumenie peniazom. Celkovo vidíme, že i keď mince v každom obchode používame (na platenie či do vozíkov vo veľkých samoobslužných predajniach), sú vlastnosti mincí, ktoré nám akosi unikajú. Len správnym poznaním pravých platidiel sa vyhneme strate financií vďaka falzifikátom. Pri otázkach na meny krajín sa ukázalo, že poznáme našich priamych susedov, ale cestovanie orientujeme skôr západným smerom. Plat až tak veľmi neriešime. Vieme, že je nízky, ale ako presne? Aj tak nemôžeme mať iný ako tabuľkový...

Radi by sme však učiteľov povzbudili, aby sa do finančnej gramotnosti pustili. S našimi pracovnými učebnicami z mnohých tém dokážu urobiť zábavu, v mnohých témach sa sami niečo dozvedia...

Len prosíme, neskúšajte encyklopedické vedomosti. Tie vo finančnom svete príliš rýchlo zastarávajú.

Poďakovanie

Tento článok vznikol vďaka podpore projektu KEGA 014UK-4/2020

LITERATÚRA

[1] Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu: *Národný štandard finančnej gramotnosti verzia1.2*, Bratislava, 2017, dostupné online https://www.minedu.sk/data/att/11358.pdf [cit-15/10/2021]

[2] Tóth Peter, Dillingerová Monika: *FINANCIE V PRAXI A*, Bratislava, ABCedu, 2019, ISBN 978-80-973319-6-2

[3] Tóth Peter Samuel, Dillingerová Monika: *FINANCIE V PRAXI B*, Bratislava, ABCedu, 2021, ISBN 978-80-973319-7-9

RNDr. Monika Dillingerová, PhD.
Fakulta matematiky fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: dillingerova@fmph.uniba.sk

KOMBINATORIKA OKOLO NÁS

ĽUBOMÍR DRUŽBACKÝ

ABSTRAKT. *V rámci workshopu som pripravil niekoľko úloh, ktoré môžete využiť na hodinách kombinatoriky, prípadne ako inšpiráciu pre svoje vlastné úlohy. V úlohách sa dá pokračovať, či už do šírky alebo do hĺbky, teda vytvárať úlohy na približne rovnakej úrovni náročnosti alebo môžete úroveň náročnosti tiež zvyšovať. Taktiež by bolo možné zadať žiakom otvorené úlohy, aby na danú tému, vymysleli svoje úlohy. Predovšetkým som chcel poukázať na potrebu kreatívneho myslenia v matematike. Zaiste to nebude po vôli každému vášmu žiakovi, možno sa nájdu mnohí, ktorí budú preferovať úlohy typu: otázka – odpoveď. Ale je dobre vedieť, že kreativitu sa dá u žiakov rozvíjať. Ak by ste našli niekoľkých žiakov, ktorí sa radi podrobia rozvoju kreatívneho myslenia pod vašim vedením, spoločnosť to uvíta, možno neocení, ale uvíta; totiž, takých jedincov bude potrebovať.*

Kde začať...

Ľudia potrebujú premýšľať, inak by slepo napochodovali do jamy. Ľudia si častokrát myslia, že rozmýšľajú, ale nie je tomu tak. Väčšinou za myslenie považujú to, čo ich prvé napadne. Napr. keď ich napadne, že sa budú hrať na mobile, tak to považujú za geniálny nápad a budú sa hrať na mobile celé hodiny. Navrhnite svojim žiakom takúto predstavu: Predstav si že si sám doma, čo by si tak mohol robiť? ... Hrať sa na PC, pozerať televízor, hrať sa na mobile..., ale mohli by ste tiež učiť sa angličtinu, geografiu, alebo si len tak prečítať nejakú knihu.

Tak ešte raz: Predstavte si, že... sa vrátiš zo školy a chceš stihnúť tieto tri veci: učiť sa angličtinu, ísť von a zahrať sa na mobile. Koľko máte možností v akom poradí to urobíte?

Myslím, že toto je pre žiakov jeden z najzaujímavejších spôsobov ako začať hovoriť o kombinatorike. Samozrejme tento problém budete musieť precvičovať aj na iných úlohách, môžete zoraďovať hrnčeky alebo plyšákov na poličke,... Ale organizovať si svoj čas, to je naozaj užitočná vec.

Toho čo by sme chceli poobede stihnúť môže byť viac, môžeme pridať napr. rozhovor s rodičmi. Ak chceme stihnúť tri, či štyri aktivity, potom sa prvky nemôžu opakovať. Ale môžeme uvažovať aj ináč: trochu sa pohrám na mobile, potom sa pôjdem učiť angličtinu a potom sa opäť pohrám na mobile. Ideálna možnosť by zrejme pre mnohých žiakov bola: trochu sa pohrám na mobile, potom sa ešte trochu pohrám na mobile, a nakoniec sa ešte trochu pohrám na mobile. Takže môžeme uvažovať aj nad úlohou, kedy sa prvky môžu opakovať. Skúsení učitelia vedia, že v triede sa zavše nájdu žiaci, ktorým robí obrovský problém pochopiť, kedy sa prvky opakujú a kedy zase nie. Pri organizovaní svojho času, verím, že to všetci pochopia, alebo aspoň skoro všetci, a keď nie na prvýkrát, tak aspoň v dohľadnej chvíli.

Tréning

Tentokrát nemyslím na precvičovanie matematických úloh, ale na skutočný tréning svalov. Aj v tejto oblasti života som našiel krásne úlohy z kombinatoriky. Asi ste sa dostali na rôzne stránky či už na internete alebo v rôznych časopisoch, kde sa písalo o rôznych svokoch: „Cvičte to, a cvičte to." Oveľa menej je však počuť o tréningových programoch. Teda o tom, koľko treba cvičiť, koľko času denne, koľko dní v týždni a podobne. Paul Wade vo svojej knihe *Tréning väzňa* veľmi pekne popisuje niekoľko tréningových programov, pričom upozorňuje na riziká, ktoré sú spojené s nadmerným cvičením, ktoré v skutočnosti neprinesie nikomu želaný úžitok, lebo intenzívne cvičenie vás rýchlo vyčerpá, začnú vás bolieť kĺby a po do dvoch mesiacov to necháte plávať.

Prvý tréningový program, ktorý je najvhodnejší pre začínajúcich, resp. rekreačných športovcov Paul Wade nazval *Nová krv* a vyzerá tak, že cvičíte dvakrát do týždňa. Keďže sme slobodný ľudia, môžeme si vybrať, v ktoré dva dni v týždni budeme cvičiť. Koľko máme všetkých možností?

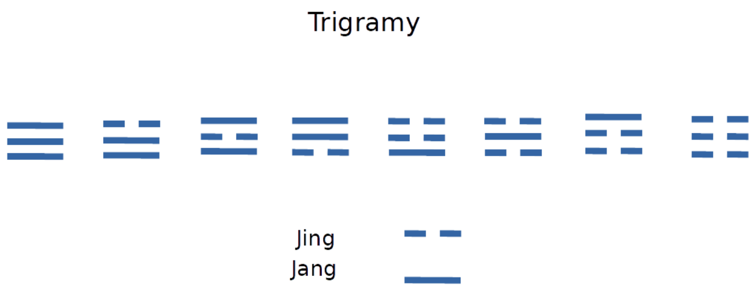
Druhý tréningový program má názov *Správny prístup*. Tu sa cvičí tri dni v týždni. Koľko je všetkých možností ako si môžem takýto program navoliť? Prípadne môžete otázku obmeniť: Ak by išlo o vyučovaciu hodinu TV, ako rôzne by sa tieto vyučovacie hodiny dali navoliť v rozvrhu, ak by sme v jeden deň nechceli viac ako jednu hodinu? Ak by sme pripustili možnosť dvojhodinovky? A podobne.

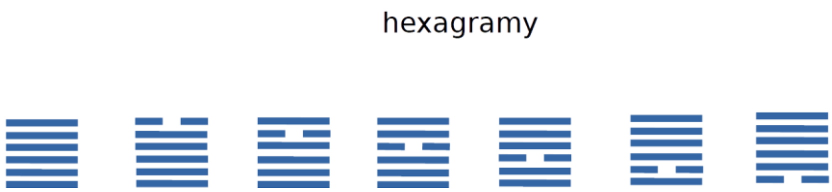
Ďalší tréningový program má názov *Veterano*. Tu sa cvičí až šesť dní v týždni, pričom Paul Wade upozorňuje, že tento program, ktorý je určený pre profi športovcov, môžu športovci zaradiť do svojho tréningu len na obmedzený čas, napr. na 2 mesiace, a potom zvoľniť. Jedna z možností je, že budem cvičiť v pracovné dni + sobotu, nedeľu budem mať voľnú. Ktoré sú ostatné možnosti a koľko je ich všetkých spolu? Tu žiaci rýchlo pochopia, že počet možností pri programe „cvičím 6-krát do týždňa“ je rovnaký ako „cvičím raz do týždňa“; v tomto prípade mám raz do týždňa voľno.

Myslím, že tieto úlohy krásne nahrádzajú oné staré, týkajúce sa starých električkových lístkov, na ktorých sa označovali čísla od 1 do 9.

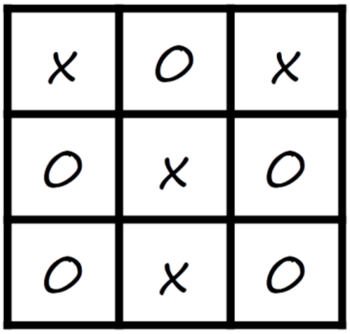
I-ťing alebo Kniha premien

Kniha premien (I-ťing) je stará čínska kniha napísaná niekedy okolo roku 1000 pred Kr., možno aj skôr. Nachádzajú sa v nej trigrami a hexagrami, ktoré sa používali na veštenie. Trigram tvoria tri čiarky, hexagram šesť čiarok, pričom tieto čiarky môžu byť neprerušené alebo prerušené (ide vlastne iba o iný zápis symbolov jing a jang). Nemeckého matematika, filozofa, teológa a polyhistora Gotfrieda Leibnitza fascinovala orientálna kultúra, a práve trigramy a hexagramy ho inšpirovali k tomu, aby vymyslel binárnu sústavu. V roku 1703 vydal dielo, v ktorom namiesto neprerušenej a prerušenej čiarky zaviedol používanie 0 a 1, ktoré používame dodnes.





I keď sa vám zdá Kniha premien staručká, to čo v nej Gotfried Leibnitz našiel je dnes všade okolo nás. Binárna sústava sa využíva v elektrických obvodoch, v senzorike, v počítačoch, v morzeovke a mnohých ďalších oblastiach, v ktorých si to ani neuvedomujeme; napr. čo taká hra piškvorky 3x3. Ide vlastne o značenie políčok pomocou binárnej sústavy, kde namiesto 0 a 1 používame krúžok a krížik. Mohli by sme položiť žiakom zaujímavú otázku: Koľko existuje všetkých možností ako hra Piškvorky na pláne 3x3 môže skončiť?

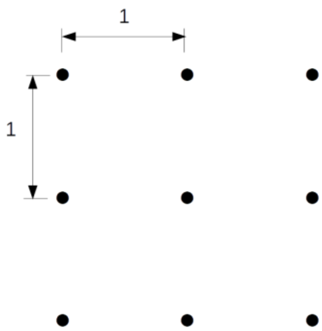


Piškvorky sú super, ale kde to má využitie, kde to nájdeme „okolo nás“? Napr. takto sa dajú značiť na štvorčekovom papieri vyšívacie, či pletacie vzory, patchwork, môžete si vymyslieť svoju mozaiku v kúpeľni, súvisia s tým mimoriadne rozšírené pixely. Ozaj, ako by sa dal zapísať viacfarebný obrázok pozostávajúci z pixelov iba pomocou 0 a 1? Ďalšie veľmi pekné využitie binárnej sústavy a kombinatoriky nájdeme v maľovanej krížovke. Naučte svojich žiakov riešiť maľované krížovky, naplnite ich čas zmysluplnou činnosťou, ktorá rozvíja kombinatorické myslenie.

Uzamknutie obrazovky telefónu pomocou vzoru

Odomykanie obrazovky telefónu nakreslením nejakého vzoru spojením bodov, ktoré tvoria sieť 3x3, je činnosť ktorú robia vaši žiaci asi 72-krát za deň. Ale veď tu ide o krásnu kombinatoriku, ktorá ich navyše bude zaiste baviť. Tento matematický model ani zďaleka nie je taký nový ako smartfón. Ide vlastne o geoboard 3x3, ktorý v matematike všetci dobre poznáme, avšak využíva ho asi len veľmi málo učiteľov. Poďme sa teda pozrieť aspoň na niekoľko úloh, ktoré vás snáď budú inšpirovať k ďalším a ďalším úlohám, alebo k záujmu o geoboard.

Definujme najkratšiu vzdialenosť dvoch bodov ako vzdialenosť 1.



Ak si chcete vytvoriť na telefóne kód nakreslením nejakého vzoru, je potrebné spojiť aspoň 4 body. Ale začnime niečím jednoduchším.

Ak by bolo dovolené vytvoriť si kód z trojuholníkov, ktorých dve strany sú dlhé 1, Koľko možností by ste mali? (Pre jednoduchosť zostaneme zatiaľ pri gumičkovaní na geoboarde.)

Keď sme zvládli túto jednoduchú úlohu, môžeme náročnosť zvýšiť.

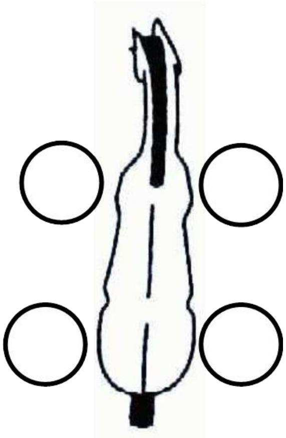
Je dovolené vytvoriť si kód z trojuholníkov, ktoré budú spájať 4 body. Koľko možností máte? (Stále zostávame pri gumičkovaní na geoboarde.)

Na mobile je potrebné nakresliť trojuholník jedným ťahom, pričom mobilu záleží na poradí bodov. Koľkonásobne sa týmto pravidlom zvýšil počet všetkých možností, oproti gumičkovaniu na geoboarde?

Ak ste naozaj svedomito vyriešili tieto tri úlohy, verím, že ste objavili potenciál geoboardu a kód na uzamknutie obrazovky pomocou vzoru. Zastavili sme sa iba pri trojuholníkoch, iba pri spojení 4 bodov, verím, že vás napadajú ďalšie zaujímavé úlohy, alebo si zaobstarajte knihu, ktorá takéto úlohy obsahuje.

Matematika života

Yan Steward v rovnomennej knihe ako je táto kapitola, teda Matematika života, popisuje krásnu históriu toho ako matematika postupne vstúpila do biológie. Jedna z vecí, ktorá je pre nás a pre našich žiakov príťažlivá sú nové poznatky, nové objavy, niečo čo je aktuálne. Preto som sa vo svojej pedagogickej praxi, samozrejme nie hneď, ale postupným vývojom, snažil svojim žiakom prepašovať niečo z matematiky 20. storočia alebo ešte novšej. Jednou z vecí, ktorej sa matematika začala v biológii venovať sú chody zvierat. Ako chodia štvornohé zvieratá, šesťnohý hmyz, osemnohý pavúci, atď. Teda ide o tom, ktorou nohou vykročia, ktorou pokračujú a pod. Možno to nie je na prvý pohľad kombinatorická úloha, ale pri troške snahy sa z tohto problému dá ľahko kombinatorická úloha urobiť.



Pokúste sa teda napísať všetky vzorce chodu koňa, ktoré by mohol používať a zvýraznite tie, o ktorých si myslíte, že sú správne; teda, že ich kôň naozaj používa. Je to úloha pri ktorej deti zažijú naozaj množstvo zábavy, údivu, realizujú pri nej svoju kreativitu, ktorá zavše nestačí, pretože problém ďaleko presahuje naše predstavy.

To všetko má obrovské využitie napríklad pri animácií zvierat alebo pri robotických hračkách. Zaiste nemusí to byť každému blízke, a nie každý to v živote využije, ale to súvisí práve s pochopením tej najhlavnejšej myšlienky: Nie je všetko pre všetkých.

LITERATÚRA

[1] Stewart, I.: *Krocení nekonečna. Příběh matematiky od prvních čísel k teorii chaosu*: Praha, CPRESS, 2014, ISBN 9788026402954.

[2] Stewart, I.: *Matematika života. Odkrývání tajemství bytí. :* Praha, Academia, 2014, ISBN 9788020023605.

[3] Wade, P.: *Tréning väzňa*. : Šamorín, Zelený kocúr, 2013, ISBN 9788097092238.

Mgr. Ľubomír Družbacký
Popularizátor matematiky
Ľubomír Družbacký – GOOD IDEA
Zelenečská ulica 103
SK – 917 02 Trnava
e-mail: lubo.dr@gmail.com

MATEMATICKÉ PRECHÁDZKY

SILVIA HARINGOVÁ, VERONIKA BOČKOVÁ

Pracovná dielňa bude zameraná na realizáciu matematickej prechádzky, outdoorovej aktivity realizovanej v skupinách, v ktorej členovia skupiny spolupracujú, komunikujú, hľadajú spoločné a čo najlepšie stratégie riešenia úloh. Účastníci sa v rámci workshopu oboznámia s aplikáciou MathCityMap, prostredníctvom ktorej si následne vyskúšajú matematickú prechádzku v exteriéri i interiéri. Po realizácii prechádzok bude účastníkom predstavený portál MathCityMap na tvorbu a spravovanie úloh a prechádzok..

Úvod

Dôležitou úlohou učiteľov matematiky je vzbudiť záujem žiakov o matematiku, vytvoriť pozitívny vzťah k predmetu a ukázať im reálne využitie naučených poznatkov. Z rôznych výskumov vyplýva, že postoj žiakov k matematike je ovplyvnený vzdelávacími skúsenosťami aj osobou učiteľa [1], [2]. Ako uvádzajú Gurjanow, Zender a Ludwig [3], vonkajšie vyučovanie pozitívne podporuje vzťah žiakov k matematike aj motiváciu k ďalšiemu štúdiu. Jednou z možností ako podporiť vonkajšie vyučovanie prepojené s úlohami s reálnym kontextom je využitie matematických prechádzok vo vyučovaní matematiky.

Matematické prechádzky

Matematická prechádzka je prechádzka, počas ktorej účastníci objavujú a riešia matematické úlohy, štandardné aj neštandardné, prepojené so skutočnými objektmi. Matematické prechádzky sa riešia v skupinách, členovia skupiny spolupracujú, komunikujú a nachádzajú spoločné riešenia úloh. Úlohy prechádzky sa nachádzajú v blízkom okolí v pešej vzdialenosti. Pri riešení úloh sa často využívajú aj rôzne meracie pomôcky ako meracie pásmo alebo drevený skladací meter [4].

Napriek tomu, že myšlienka matematických prechádzok má dlhú históriu, cieľom projektu Erasmus+ „Mobilné matematické chodníky v Európe“ (MoMaTrE) je prepojiť matematické prechádzky s mobilnými zariadeniami [5]. Na realizáciu prechádzok vytvorili v rámci projektu voľne dostupnú aplikáciu „MathCityMap“(MCM) a na vytvorenie matematických prechádzok MCM portál.

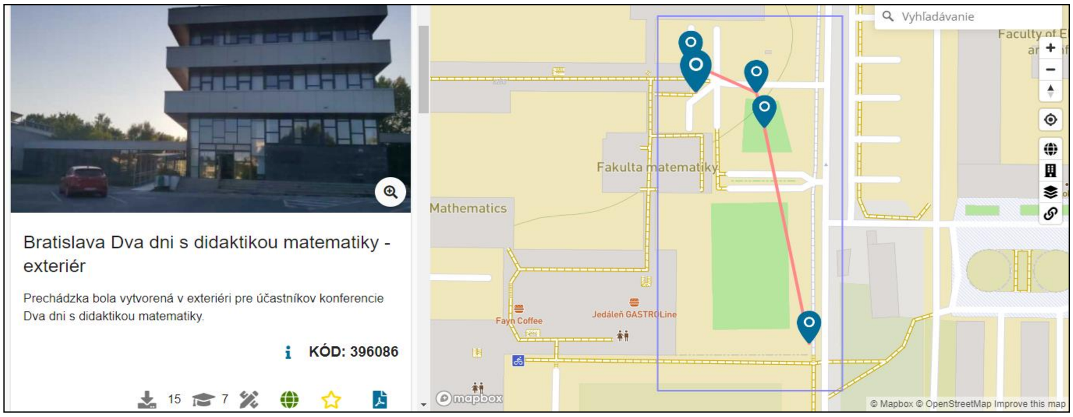
Po krátkej registrácii na MCM portáli je možné vytvárať vlastné úlohy, ktoré sa následne spájajú do matematickej prechádzky. Každá matematická prechádzka musí obsahovať aspoň štyri úlohy. Pri tvorbe úlohy je nevyhnutné urobiť fotografiu objektu o ktorom je úloha matematickej prechádzky. Objekt musí byť odfotografovaný tak, aby sa úloha nedala vyriešiť priamo z obrázka, ale účastník prechádzky musel prísť na dané miesto podľa GPS súradnice. Preto je taktiež nevyhnutné určiť presnú polohu úlohy pri jej vytvorení. Následne sa formuluje úloha matematickej prechádzky. Tvorca úlohy si môže vybrať spomedzi rôznych typov odpovedí na úlohy: konkrétne číslo, interval, výber z možných odpovedí alebo GPS súradnica. Každá úloha by taktiež mala obsahovať pomôcky, ktoré účastníci prechádzky môžu použiť, ak nevedia riešiť úlohu. Pomôckou môže byť vzorec, náčrt alebo spôsob postupu riešenia. Súčasťou úloh je aj vzorové riešenie, ktoré má byť pre každého riešiteľa zrozumiteľné. Ku každej úlohe je taktiež vhodné určiť ročník, v ktorom žiaci už vedia vyriešiť danú úlohu a aj pomôcky nevyhnutné k výpočtu. Úlohy a prechádzky môžu byť použité na súkromné účely alebo voľne prístupné pre všetkých MCM používateľov. Verejná prechádzka musí byť schválená slovenským administrátorom projektu, ktorý môže navrhnúť zmeny v zadaní úlohy.

Dva dni s didaktikou matematiky

Účastníci workshopu Matematické prechádzky sa v rámci pracovnej dielne oboznámili s matematickými prechádzkami, aplikáciou a portálom MathCityMap. Na začiatku workshopu si účastníci stiahli aplikáciu do mobilných zariadení, vyhľadali si konkrétnu matematickú prechádzku určenú pre workshop ale aj v okolí ich mesta či miesta školy. Následne boli rozdelení do skupín, s meracím a písacím vybavením riešili matematické prechádzky vytvorené v exteriéri aj v interiéri Fakulty matematiky, fyziky a informatiky ako aj v jej interiéri. Pre potreby workshopu sme vytvorili matematické prechádzky v exteriéri aj v interiéri fakulty. Prechádzky sú aj momentálne dostupné pre študentov fakulty ako i pre širokú verejnosť pod názvom: Dva dni s didaktikou matematiky – exteriér. Dva dni s didaktikou matematiky - interiér. Po absolvovaní prechádzok prebehla diskusia o jednotlivých úlohách matematických prechádzok. Následne bol účastníkom predstavený portál www.mathcitymap.eu/sk, v ktorom bola participantom ukázaná možnosť tvorby úlohy ako i matematickej prechádzky.

Dva dni s didaktikou matematiky - exteriér

Na obrázku 1 môžeme vidieť konkrétnu ukážku matematickej prechádzky v exteriéri, ktorá sa skladá z piatich úloh. Poloha jednotlivých úloh je znázornená bodmi modrej farby. Na obrázkoch 2 až 6 sú znázornené konkrétne ukážky úloh z prechádzky.



Obrázok 1: Matematická prechádzka s názvom Dva dni s didaktikou matematiky exteriér

Úloha Najväčšie a najmenšie číslo (Obrázok 2) bola zameraná na výpočet rozdielu najväčšieho a najmenšieho štvorciferného čísla vytvoreného z cifier popisného čísla budovy. V úlohe Rok narodenia (Obrázok 3) mali účastníci na pamätnej tabuli Juraja Hronca nájsť rok jeho narodenia a zapísať ho rímskym číslom. Farbeniu dláždicovej striešky sa účastníci venovali v úlohe Nová strieška (Obrázok 4), v ktorej mali určiť koľko metrov štvorcových je potrebné zamaľovať k obnoveniu striešky. Prácu s kompasom si účastníci vyskúšali v úlohe Socha Kopernika (Obrázok 5). V úlohe mali určiť svetovú stranu, na ktorú sa Kopernik pozerá. V úlohe Schody (Obrázok 6) participanti počítali koľko možností majú na vystúpenie po schodoch, ak idú po jednom alebo dvoch schodoch.

Obrázok 2: úloha Najväčšie a najmenšie číslo

Obrázok 3: úloha Rok narodenia

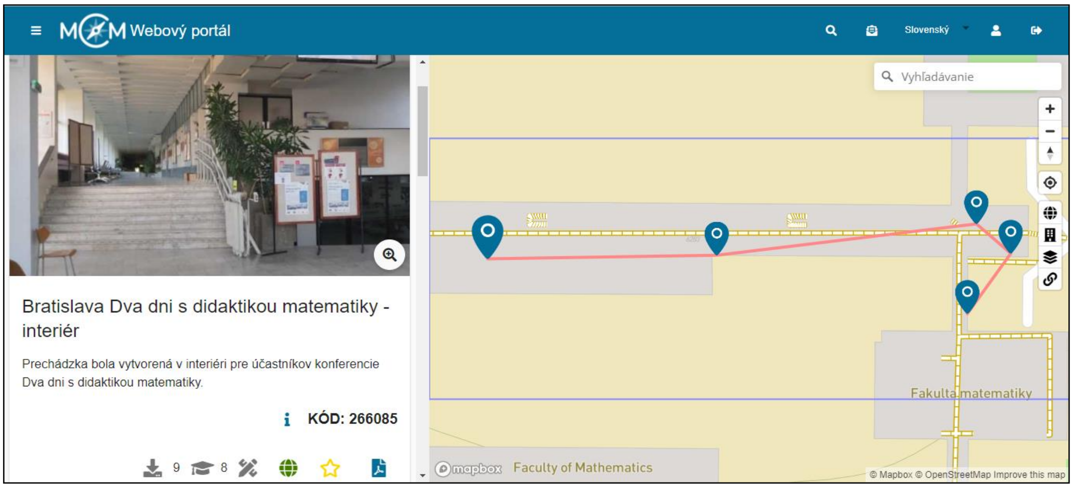
Obrázok 4: úloha Nová strieška

Obrázok 5: úloha Socha Kopernika

Obrázok 6. úloha Schody

Dva dni s didaktikou matematiky - interiér

Na Obrázku 7 je znázornená matematická prechádzka v interiéri budovy fakulty , ktorá sa skladá taktiež z piatich úloh. Na Obrázkoch 8 až 12 sú znázornené konkrétne ukážky úloh z prechádzky.



Obrázok 7: Matematická prechádzka s názvom Dva dni s didaktikou matematiky interiér

V úlohách sa účastníci stretli s úlohami zameranými na pravdepodobnosť, kombinatoriku, obsahy útvarov aj operácie s číslami. V úlohe Knižnica (Obrázok 8) mali vypočítať pravdepodobnosť, že si vyberú knižku z poličky za červenými dvierkami. Vypočítať obsah plochy, ktorú je potrebné vymaľovať na oknách posluchárne určovali účastníci v úlohe Posluchárne (Obrázok 9). V úlohe Oznamy (Obrázok 10) mali participanti workshopu vypočítať počet oznamov, ktoré sa zmestia na tabuľu. Úloha Profesori matematiky (Obrázok 11) bola zameraná na určenie počtu rokov najdlhšieho pôsobenia profesora matematiky na fakulte. V úlohe Kód na skrinke (Obrázok 12) účastníci počítali koľko rôznych kódov môžu študenti vymyslieť pri jej zamykaní.

Obrázok 8: úloha Knižnica

Obrázok 9: úloha Posluchárne

Obrázok 10: úloha Oznamy

Obrázok 11: úloha Profesori matematiky

Obrázok 12: úloha Kód na skrinke

Záver

V rámci pracovnej dielne sme mohli pozorovať nadšenie účastníkov o matematické prechádzky, nakoľko sa mohli nie len oboznámiť s matematickými prechádzkami, ale si ich aj vyskúšali absolvovať. Najmä učitelia z praxe sa zaujímali o tvorbu a samotný priebeh matematických prechádzok. Veríme, že nové poznatky, ktoré si osvojili počas našej pracovnej dielne využijú aj vo vyučovacom procese a pripravia tak svojim žiakom zaujímavú aktivitu na spestrenie hodín matematiky.

LITERATÚRA

[1] G. Pavlovičová, J. Záhorská: The Attitudes of Students to the Geometry and Their Concepts about Square, in *7th World Conference on Educational Sciences*, Grécko: Elsevier, 2015, str. 1907 -1912.

[2] K. Wilkie, P. Sullivan: Exploring intrinsic and extrinsic motivational aspects of middle school students' aspirations for their mathematics learning, *Educational Studies in Mathematics,* 2017, 97(3), str. 235 – 254.

[3] I. Gurjanow, J. Zender, M. Ludwig: MathCityMap – Popularizing mathematics around the globe with math trails and smartphone, in *Research on Outdoor STEM Education in the digital Age.* Nemecko: WTM, 2020, str. 103 – 110.

[4] V. Bočková, G. Pavlovičová, S. Čeretková: *Increasing pupils' interest in geometry through mathematical trails*. Španielstko, ICERI, 2020, str.

[5] S. Čeretková, K. Bulková: *Mathematics Trails in Initial Teachers Education in Slovakia*, Slovenská republika, APLIMAT, 2020, str. 2038 - 2047

Mgr. Silvia Haringová, PaedDr. Veronika Bočková
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Tr. A. Hlinku 1,
SK – 949 01 Nitra
e-mail: silvia.haringova@ukf.sk, veronika.bockova@ukf.sk

ZAZOOMOVANÉ NA MATEMATIKU: VÝUČBA MATEMATIKY POČAS DIŠTANČNÉHO VZDELÁVANIA

IVANA HUČKOVÁ

ABSTRAKT. *V článku sa nachádza prierez aktivitami, ktoré sme používali počas dištančného vzdelávania, aby sme znovu motivovali študentov k samostatnej práci. Každá aktivita je detailne opísaná, aby sa dala reprodukovať na hodine. V závere článku prezentujeme výsledky z dotazníka, ktorý sa zaoberal obľúbenosťou aktivít a tým, ako vplývali na vedomosti študentov.*

Úvod

Na začiatku školského roku 2020/2021 do prvého ročníka nastúpili vcelku neštandardní študenti, ktorí časť ôsmeho/deviateho ročníka strávili na dištančnom vzdelávaní. Nanešťastie po necelých 2 mesiacoch prezenčného vyučovania na gymnáziu boli títo študenti nútení kvôli pandemickej situácii prejsť na takýto typ vyučovania znovu. Tentokrát však na dlhých 8 mesiacov.

Počas prezenčného vyučovania sme si zvykli na to, že teóriu k prebratému učivu budujeme spoločne a takisto sa snažíme sa čo najviac kooperovať. V nastavenom trende sme sa pokúšali pokračovať aj počas prvých týždňoch na dištančnom vyučovaní, ale pripraviť takýto typ vyučovania cez zoom sa ukázal byť ako veľmi náročný na energiu z oboch strán a rýchlo sme začali skĺzavať do frontálneho vyučovania. S tým prichádzalo iba pasívne konzumovanie prednášanej látky. Keďže týmto spôsobom sme nevedeli dlhodobo fungovať obe strany, tak som hľadala spôsoby akými by som ich mohla motivovať k nejakej aktívnej činnosti počas hodín matematiky.

Ako motivovať?

Veľmi dôležitou časťou motivácie sa ukázali byť dotazníky a osobné spätné väzby po hodinách. Študenti naozaj potrebovali vidieť, vedieť a počuť, že nám na nich záleží a naozaj vypočujeme ich pripomienky k predmetu (alebo sa ich len spýtame, že ako zvládajú situáciu).

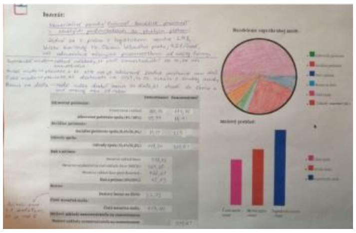
Dotazníky fungovali na rôznych úrovniach (od rýchlej spätnej väzby po hodine po veľký prehľad raz za pol roka) a týkali sa všetkých predmetov a aj ich well-beeingu.

Druhou časťou motivácie bolo spísanie si pravidiel pre prácu a vyučovania počas dištančného vzdelávania – od pravidiel typu, že ako budeme fungovať počas zoomu (kedy zapnutá kamera, jedenie, pracovné pomôcky, diskutovanie) až po celoškolské pravidlo, že sa budeme snažiť obmedzovať čas strávený za obrazovkou počítača a budeme hľadať úlohy a projekty, ktoré by nám v tom pomohli.

Treťou časťou motivácie boli už vyššie spomínané skupinové práce, aktivity mimo počítača a hry. V článku ich uvádzam v chronologickom poradí, tak ako sme sa nimi zaoberali počas školského roku. Ku každej aktivite pripájam aj výsledky dotazníka, ktorý vypĺňali študenti k danému tematickému celku.

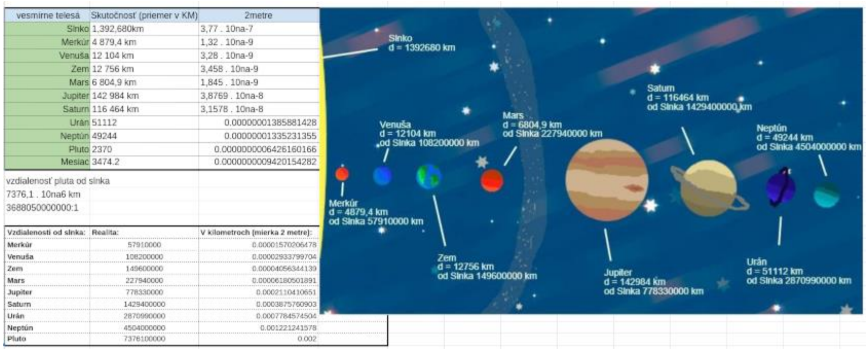
Firma a Slnečná sústava

Projekt Firma má za úlohu ukázať, že *percentá* vedia študenti použiť v každodennom praktickom živote a zároveň nenásilným spôsobom ich má vzdelať v oblasti základov *finančnej gramotnosti*. Jedná sa o skupinovú prácu, kde každá skupina (2-4 členná) má za úlohu vymyslieť si vlastnú firmu, ktorá sa zaoberá akademicky plauzibilnou činnosťou. Následne si na internete vyhľadá aká približne sa v danej oblasti ponúka hrubá mzda a vytvoria si inzerát. Ďalším krokom je vyplniť tabuľku, kde sa postupne dopracujú k čistej mzde a superhrubej mzde ich fiktívneho zamestnanca (Obrázok 1: Projekt Firma).



Obrázok 1: Projekt Firma

Druhým v poradí je skupinový projekt Slnečná sústava. Nadväzuje na prácu *s percentami* a pripája *prácu s pomerom a mierkou mapy*. Každá skupina má prekresliť Slnečnú sústavu v zmenšenej mierke. Počas práce na projekte väčšina skupín zistí, že na tak malých rozmeroch by planéty mali iba nepatrné rozmery a tak ich veľkosť prispôsobia. V poslednom štádiu pri reflexii riešime všetky skupiny spolu koľkopercentné zmenšenie sme vytvorili a takisto reflektujeme zmenu mierky pri veľkosti planét. Pri práci na projekte sme využívali Google Sheets a virtuálnu tabuľu Miro [1], kde mohli študenti v rámci skupiny spoločne kresliť na jedno plátno.

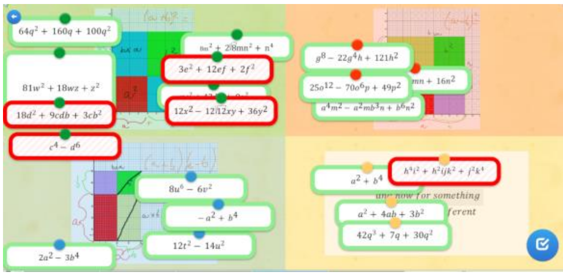


Obrázok 2 : Projekt Slnečná sústava

V rámci spätnej väzby nás zaujímalo, ako hodnotia samotní študenti vedomosti z danej oblasti. Až na pár výnimiek boli so svojimi znalosťami z tejto témy spokojní, čo sa prejavilo aj na písomných prácach. Nutné je však podotknúť, že týmto témam sa venovali ešte na základnej škole.

Honba za pokladom

Táto aktivita patrí medzi herné – počítačové. Študenti v nej riešia rôzne problémy súvisiace s preberanou témou – v našom prípade sa jednalo o *lineárne rovnice a algebraické výrazy*. Z každej aktivity dostanú indíciu a na záver z indície mali poskladať heslo [2]. Aktivity sú zamerané na praktické aspekty – aby si vizuálne zapamätali tvar základných algebraických vzorcov (Obrázok 3). a od pohľadu na lineárnu rovnicu skúšali zistiť, kedy nemá riešenie alebo teoretické aspekty, kde si osvojujú terminológiu pomocou tajničky. Na výrobu Honby za pokladom som využila learningapps.org [3]. Ďalší spôsob ako precvičiť pochopenie terminológie je aplikácia skribbl.io [4], ktorá pracuje na spôsobe šarád. Do tejto aplikácie som nahrala .txt súbor, ktorý obsahoval iba pojmy, ktoré sme chceli precvičovať. Z nich jeden pojem aplikácia hráčovi ukázala, on sa ho snažil nakresliť tak, aby ostatní hráči uhádli. Pri tejto aktivite museli naozaj rozumieť pojmom, o ktorých sme sa rozprávali. Nanešťastie sa do hry zahĺbili až tak, že nám nezostal na konci hodiny čas na spoločnú reflexiu, ktorá je pri takýchto aktivitách vhodná.

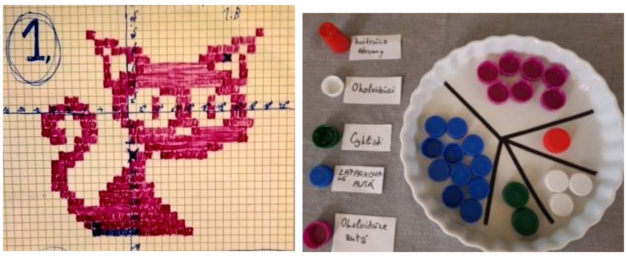


Obrázok 3 : Honba za pokladom

Algebraické výrazy patria vo všeobecnosti k látkam, ktoré študenti uchopia až po dlhšom čase a nie vždy sa to podarí v prvom ročníku. Pri zhodnocovaní situácie študenti odpovedali, že často „tam nevidia tie vzorce“ alebo nevedia dávať poriadne na spoločného menovateľa. Inak ani k výrazom ani k lineárnym rovniciam nehlásili v dotazníku žiadne problémy.

Maľovaná krížovka, grafy a infografika

Pri prechode od lineárnych rovníc ku grafickému stvárneniu funkcií a ku téme grafov všeobecne som sa rozhodla vytvoriť aktivity, na ktoré nepotrebovali študenti počítač. Prvou bola aktivita maľovaná krížovka (Obrázok 4a). Namiesto klasickej maľovanej krížovky študenti zaznamenávali štvorčeky zodpovedajúce bodom na *súradnicovej sústave*. Počas druhej aktivity mali sedieť pred domom na lavičke a počítať cyklistov, autá, chodcov a pod. a následne vyrobiť doma graf z materiálu, ktorý nájdu doma (lego, gombíky, cestoviny...) (Obrázok 4b).



Obrázok 4 : (a) Maľovaná krížovka (b) Graf

Pokročilejšie projekty z grafov sme riešili znovu za počítačom. Na exaktnejšiu vizualizáciu v súradnicovej sústave sme využívali aplikáciu Desmos [5] a s orientáciou a čítaním v grafoch nám pomáhala aplikácia od Roslingovcov s interaktívnymi grafmi, ktoré sa týkajú aktuálnej situácie vo svete - Gapminder [6]. Veľkou výzvou a zároveň najväčším skupinovým projektom bola Infografika. Každá skupina má za úlohu vymyslieť si nejaké ich srdcu blízke podujatie (filmový festival, hudobný festival, vedeckú konferenciu) a majú vytvoriť infografiku, ktorá má zhodnotiť tento projekt po jeho skončení (z hľadiska návštevnosti, prezentujúcich, žánrov...). Najskôr si musia naštudovať, čo obsahuje a čo neobsahuje správna infografika a vytvoriť ju buď v počítači alebo nakresliť na papier.

Zo spätnej väzby vyplynulo, že študenti si vynikajúco osvojili prácu so súradnicovou sústavou (potvrdzuje sa to aj teraz vo vyššom ročníku). Jediný problém, ktorí pomenovali bolo občasné zamenenie x a y osi.

Kniha na matiku

Projekt Kniha na matiku zadávam študentom aj počas prezenčného vyučovania. Na výber dostanú zoznam kníh, ktoré súvisia s matematikou všeobecne alebo s témou, ktorú preberáme v danom roku [7]. Na prečítanie knihy majú takmer rok a následne majú spísať krátku prezentáciu, kde sa majú zamerať na to, čo bolo pre nich v knihe prínosom a čo na druhej strane ich v knihe nezaujalo.

Kahoot

Precvičovanie vedomostí u študentov pomocou Kahoot.com [8] prešlo v mojom prípade evolúciou. V prvej fáze som ho používala na overovanie si vedomostí pred písomnou prácou. Na aktivizovanie študentov fungoval dobre a Kahoot si aj aktívne pýtali, ale čo sa týkalo vedomostí, tak neboli až také trvalé. V druhej fáze som použila Kahoot pri zavádzaní novej látky (*grafy*) a rozhodla som sa, že použijem také obrázky grafov, pri ktorých bolo treba sa zamerať na to, či nás ich autor niečím nezavádza. V tomto prípade aj toto konkrétne zameranie vyburcovalo ich zvedavosť do takej miery, že naozaj všetci hľadali na obrázkoch zádrhely. V tretej fáze (zameranie na *funkcie* (Obrázok 5).) som mala možnosť vytvoriť malý experiment. Keďže som učila v troch rôznych prváckych triedach a táto téma bola na rozhraní medzi dištančným a prezenčným vyučovaním, tak úplnou náhodou to vyšlo tak, že jedna trieda fungovala ešte cez Zoom, druhá trieda už bola prezenčne, ale pracovali na Kahoote ako jednotlivci a tretia trieda pracovala v dvojiciach. Ukázalo sa, že pri práci v dvojiciach prezenčne (Kahoot po dvojiciach v Zoome nie je úplne vhodný na realizáciu), mali z objavovania nových skutočností najväčšiu radosť a aj získané vedomosti sa javili ako trvalejšie pri preskúšavaní.

Obrázok 5 : Kahoot funkcie

Záver

Po návrate do prezenčného spôsobu vyučovania nás zaujímala spätná väzba od študentov na jednotlivé aktivity a zároveň nás zaujímalo, či sa získané vedomosti počas týchto aktivít ukázali ako trvalé. Obľúbenosť aktivít môžeme vidieť na obrázku 6, kde je zaujímavé, že niektoré aktivity sa ocitli v oboch stĺpcoch (nie každému sa všetky aktivity páčili). Čo sa týka trvácnosti získaných vedomostí, tak počas nového školského roku zisťujeme, že vedomosti z niektorých tém sa uchytili u študentov trvalejšie (grafy) a na niektorých treba zapracovať v prezenčnom vyučovaní znovu (algebraické výrazy). Momentálne pracujeme na tom, aby sme spojili aktivity z dištančného vyučovania s prezenčným vyučovaním a skúsime zistiť rozdiely medzi úrovňou vedomostí študentov v tomto a predchádzajúcom roku.

Obrázok 6: Obľúbenosť aktivít počas dištančného vyučovania

LITERATÚRA

[1] https://miro.com/, 1.11. 2021

[2] https://learningapps.org/watch?v=pg6ddg89t21, 1.11. 2021

[3] learningapps.org, 1.11. 2021

[4] https://skribbl.io/, 1.11. 2021

[5] www.desmos.com/, 1.11. 2021

[6] https://www.gapminder.org/, 1.11. 2021

[7] https://docs.google.com/spreadsheets/d/160LbUU-kZfAPrzFNikQnDyqW6S2aaXhAndUe1s5lK98/edit?usp=sharing, 1.11. 2021

[8] https://kahoot.com/, 1.11. 2021

RNDr. Ivana Hučková, PhD.
Bilingválne Gymnázium C.S. Lewisa
Haanova 28
SK – 85104 Bratislava
e-mail: ivana.huckova@bilgym.sk

POHĽAD NA VYUČOVANIE Z PERSPEKTÍVY ZNALOSTNÉHO MANAŽMENTU

JOZEF HVORECKÝ

ABSTRAKT. *Znalostný manažment rozlišuje dva druhy poznatkov: Explicitné (presne formalizované, kodifikované) a tacitné (kontextovo závislé, často podvedomé). Školské vzdelávanie venuje hlavnú pozornosť explicitným poznatkom. V článku sa zaoberáme možnosťami zvýšenia podielu tacitných poznatkov vo vzdelávaní ako podstaty kritického myslenia.*

Úvod

Dnešní zamestnávatelia volajú po tom, aby nastupujúci absolventi škôl mali mäkké zručnosti [1]. Odôvodňujú to potrebou častej rekvalifikácie spôsobenej zmenou charakteru práce počas života zamestnancov, zánikom istých pracovných činností a vznikom, resp. inováciou iných. Vravia, že v tomto smere školy nedostatočne pripravujú svojich žiakov a študentov flexibilne sa správať v budúcnosti.

Ak máme tento problém riešiť, musíme si najprv ujasniť, čo všetko spadá pod mäkké poznatky, zručnosti a schopnosti a do akej miery ich môžu školské aktivity rozvíjať. Venujeme sa tomu v nasledujúcej kapitole. V ďalšej sa budeme zaoberať špecifickou formou ich rozvoja prostredníctvom modelu SECI [2]. Ten bol pôvodne vyvinutý ako nástroj zvyšovania vedomostí a zručností v rámci celoživotného vzdelávania zamestnancov firmy Toyota. Dá sa však jednoducho aplikovať aj v školskom prostredí, nie však v našom tradičnom „tereziánskom“, ale v jeho modernejších podobách ako konštruktivistické vzdelávanie, prístup Montessori, problémové vyučovanie, učenie hrou atď.

V závere uvedieme zásady, ktorých by sa mal učiteľ pridržiavať, keď chce netradičné postupy pri vzdelávaní implementovať vo svojej práci.

Tvrdé a mäkké poznatky a zručnosti

Pojem „mäkké zručnosti“ pochádza zo slovníka americkej armády a objavuje sa v ňom koncom šesťdesiatych rokov minulého storočia [3]. Označoval zručnosti, pri uplatnení ktorých sa nevyužívajú zbrane a vojenská technika, ale napriek tomu hrajú významnú úlohu pri dosahovaní výsledku: viesť jednotku, motivovať jej príslušníkov, mať cit pre stratégiu v súlade s okolnosťami v daný moment, odhadnúť, či môže byť úspešná a podobne. Pojem sa pojem zovšeobecnil na prístupy k riešeniu akýchkoľvek problémov, pri ktorých sa ľudia nemôžu spoliehať na technológie (alebo len do určitej miery) a stal sa bežnou súčasťou manažmentu. Zároveň sa začal kryštalizovať aj jeho protipól, pre ktorý sa ujalo označenie tvrdé zručnosti – hoci v danom prípade ide väčšinou o faktografické vedomosti. Sem patria napríklad fakty: vzorce, dátumy, konštanty, prírodné zákony, štandardizované postupy riešenia atď., ktoré sú už dlhodobo súčasťou vzdelávania.

Význam tvrdých zručností – ako identifikačného atribútu vzdelaných pracovníkov – postupne klesá, nakoľko sa mnohé z nich postupne prenášajú na stroje a stávajú sa súčasťou automatizovaných procesov. Deje sa to predovšetkým vďaka informačným a komunikačných technológiám (IKT). Najnovšími trendmi v tejto oblasti sú aplikácie umelej inteligencie či „internet vecí“ (koordinované a vzájomne sa ovplyvňujúce prepojenie bežných zariadení a prístrojov, vrátane tých, ktoré používame v denne domácnostiach). Mnoho tradičných poznatkov a zručností stráca svoju cenu. Príkladom je používanie matematických tabuliek a logaritmických pravítok. Obidve pomôcky dnes v podstate zanikli a zmizli do múzeí, pretože ich úlohu oveľa efektívnejšie vykonávajú počítače a kalkulačky. Neplatí to len o matematike. Pamätať si všetky podrobnosti sa stáva zbytočným v mnohých povolaniach, lebo rýchlo a presne ich získame cez internet. Memorovanie „tvrdých“ poznatkov stráca veľa zo svojej opodstatnenosti. Dôležitejším sa stáva kontext, v ktorom vystupujú. Nezmiznú úplne: malá násobilka a vybrané slová zostanú ešte dlho nevyhnutnou súčasťou učebných osnov. Mali by sa stať bránou k „mäkším“ poznatkom.

Medzi mäkké poznatky radíme tie, pri ktorých IKT nedokáže zastúpiť človeka – buď dokáže jeho úlohu prevziať iba čiastočne alebo vôbec nie. Hoci IKT preberajú čoraz viac činností, nie pri všetkých však sa darí nahradiť ľudský um a ruky úplne a ekonomicky efektívne. Činnosti, ktoré sú pre počítače obťažné, ekonomicky neefektívne, či nevykonateľné, si zamestnávatelia cenia čoraz vyššie. Zároveň sa tento pojem zovšeobecnil. Dnes pod mäkkými zručnosťami rozumieme aj mnohé charakterové vlastnosti, pretože v sociálnych a ekonomických procesoch hrajú tiež významnú rolu. V tomto zmysle medzi mäkké zručnosti patria:

- *Kvalita osobnosti:* osobná integrita, pocit zodpovednosti, čestnosť, slušnosť, sebakontrola, time manažment, empatia/asertivita, ...
- *Schopnosť vytvárať a rozvíjať medziľudské vzťahy:* komunikačné schopnosti, ochota spolupracovať, sebadôvera, schopnosť riešiť konflikty, vyjednávať a dohodnúť sa, projektový manažment, ...
- *Všeobecný rozhľad a chápanie súvislostí:* Kritické myslenie, schopnosť riešiť problémy, spoločenská rozhľadenosť, kultúrne povedomie, kreativita, ...

Aby sme do vzdelávania zaradili aj prvky, ktoré ich rozvoj podporujú, musíme vzdelávaniu dať širší kontext. Nerezignujeme na tradičné („tvrdé“) poznatky, ale ich podávame v kombinácii s mäkkými tak, aby sa žiaci a študenti zorientovali v ich vzájomnom vzťahu a pochopili, prečo sa ich učia, prečo je dobré, aby ich vedeli. Mottom je „vedieť a vedieť prečo“.

Tacitné a explicitné poznatky

Znalostný manažment je vedomý a riadený proces definovania, vytvárania, zberu, uchovávania, zdieľania a využívania poznatkov a skúseností prítomných v organizáciách a spoločenstvách s cieľom zvýšiť ich výkonnosť [2]. Poznatky sa nachádzajú jednak v hlavách ľudí, ale sú uložené aj v dokumentoch, zachytené v procesoch a často realizované prostredníctvom strojov a zariadení.

Nie všetky poznatky sa však dajú preniesť z ľudských hláv do strojov a automatov. V mnohým prípadoch sa totiž riadime „podvedomím“ – teda z formulácie problému odhadujeme rýchlu a efektívnu cestu k jeho vyriešeniu. Výskum hraníc schopností človeka, ktoré počítače nedokážu rovnocenne vykonať, sa stáva čoraz dôležitejším. Intuitívne ich vnímajú aj zamestnávatelia a cenia si ich, lebo na rozdiel od techniky sú vzácnejšie a ťažšie dostupné. Používajú pre ne označenie mäkké zručnosti.

Vedomosti, ktoré máme, delíme v znalostnom manažmente na dva druhy:

- *Explicitné poznatky* vieme presne špecifikovať a zaznamenávať dohovoreným spôsobom pomocou špecializovaných „jazykov“ vyvinutých s cieľom zaznamenávať a odovzdávať poznatky medzi ľuďmi [4]. Najstarším je písmo. S rozvojom poznania sa vyvinuli aj ďalšie. V matematike sem patria vzorce, grafy, geometrické konštrukcie, zobrazenia priestorových telies atď. V hudbe vznikol zápis melódií pomocou notovej osnovy, v chémii chemické vzorce, v biológii štruktúra DNA a pod. Zaujímavú skupinu tvoria programovacie jazyky, lebo slúžia na komunikáciu medzi ľuďmi a strojmi. Niektoré z týchto jazykov dovoľujú zachytávať predstavy ako mentálne mapy, či procesy ako geometrické konštrukcie pomocou Geogebry [5].
- *Tacitné poznatky* sú tie, ktoré nedokážeme vyjadriť v presnej, formalizovanej podobe. Myslia sa tým všetky, ktoré zostávajú nevyslovené, skryté, „tiché“. Sú založené na skúsenostiach a ich vlastník niekedy ani netuší, že ich má. Istým spôsobom sú nadradené explicitným, lebo garantujú ich vhodnosť a bezchybnosť v danom kontexte.

Tacitným poznatkom je každá schopnosť adekvátne uplatniť daný (obyčajne explicitný) poznatok v danom kontexte. Nie vždy si jeho využitie uvedomujeme. Kontrast vidieť na nasledujúcich „trojčlenkách“ [6]:

- *Jeden kôň váži 700 kg. Koľko váži 10 koní?*
- *Jeden kôň beží rýchlosťou 20 km/hod. Akou rýchlosťou beží 10 koní?*

Aj ten, kto ich v živote neriešil, si domyslí, že na vyriešenie prvej treba násobenie, kým v druhej určite nie. Rozhodne sa vďaka tacitnému poznatku napovedajúcemu, že rýchlosť behu sa nedá skladať rovnakým spôsobom ako ich hmotnosť. Vie ich, hoci ho ich nikto nikdy neučil. Vlastne učil. Život.

Tacitné poznatky sa nedajú vyučovať tradičným spôsobom „vedomosť z knihy do hlavy“. Prichádzame na ne vlastnou skúsenosťou, častokrát metódou pokusov a omylov, inokedy pozorovaním, odzeraním a opakovaním zažitého. Z toho vyplýva, že učiteľ učí nielen vtedy, keď podáva obsah učebného materiálu, ale aj celým svojím správaním v každom momente – aj keď prenos takto nadobudnutých poznatkov nie je zďaleka priamočiary. Učebný materiál prináša explicitné poznatky, všetky ostatné aktivity vyučovacieho procesu (ale aj aktivity mimo neho) prinášajú tacitné. Nie div, že pomer tacitných a explicitných poznatkov sa prirovnáva k pomeru viditeľnej a skrytej časti ľadovca: 10% vidieť nad vodou, 90% je neviditeľných.

Pomer vyplýva zo skutočnosti, že každý z nás sa učí v každej životnej situácii – pričom si ani nemusí byť vedomý, že to robí, takže takto získaný poznatok môže byť nesprávny. V [6] je tento príklad: *“Na pastvine je 125 oviec a 5 psov. Aký starý je pastier?“* Študent má explicitné znalosti: pozná aritmetické operácie a vie ich vykonávať. Má aj tacitné poznatky:

- Vek pastiera sa pohybuje v intervale od 15 až 70 rokov.
- Prostredníctvom aritmetických operácií sa dá dopracovať k výsledku.
- Všetky úlohy, ktoré nám učiteľ nám dal, sú riešiteľné z údajov v nich.
- Za vyriešenie som kladne hodnotený.

Potreba nájsť riešenie prehluší skutočnosť, že nemá informácie o pastierovi – „vyrobí“ si ich zo znenia úlohy. Preto pokračuje: “125+5=130… to je príliš veľa, aj 125–5 je ešte veľa… ale … 125/5=25 … to vyzerá rozumnejšie… Myslím, že pastier má 25 rokov.”

Keď naozaj platí, že pri vyučovaní sa študenti stretnú iba s úlohami, ktoré sú riešiteľné z údajov v nich, žiak vo svojich úvahách nepripustí alternatívu neriešiteľnosti. Vtedy treba opraviť nie riešenie, ale tacitný poznatok. Položiť protiotázku je vhodnejšie ako dlho vysvetľovať: „*Dnes ráno sučka porodila 5 psíčat. Aký starý je pastier teraz?*“ Takto naznačíme, že vzťah matematiky a reality je oveľa zložitejší a nie všetky čísla sa dajú využiť v každom výpočte.

Človek má v hlave veľa tacitných poznatkov, o existencii ktorých ani netuší. Tu je príklad: Na hodinách matematiky sa žiaci dozvedajú explicitný poznatok:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1$$

Túto všeobecnú znalosť využil aj kráľ Šalamún, keď k nemu prišli dve ženy hádajúc sa o dieťa. Každá tvrdila, že je jeho matkou. Kráľ nariadil, aby ho kat rozťal a každej dal jednu polovicu. Z formálneho („matematického“) hľadiska je všetko v poriadku.

Šalamún však využil aj skrytý tacitný poznatok: Dve polovice dieťaťa nie sú to isté, čo celé dieťa. Skutočná matka to vedela tiež. Preto chcela zabrániť zabitiu tým, že sa dieťaťa vzdá. Samozrejme, kráľ jej ho vzápätí prisúdil a druhú ženu potrestal.

Ako vidieť, tacitné poznatky sú často dôležitejšie ako explicitné. Ich absencia môže viesť k správaniu, ktoré sa úzko zameriava na formálnu stránku riešení, nerešpektuje širšie súvislosti, ľudské a celospoločenské potreby. Pre tento spôsob profesijnej orientácie má nemčina výraz „fachidiot“. Ide o človeka, ktorý sa správa ako hlupák nie preto, že je nevzdelaný, ale pretože je vzdelaný priveľmi jednostranne – formálne hľadisko jeho profesie („fachu“) prevláda nad všetkým ostatným.

Vzdelávanie a mäkké zručnosti

Šalamúnov príbeh ukazuje, že ľudia prijímajú tacitné poznatky aj mimo tradičného vzdelávacieho procesu. Odráža sa to aj v novších definíciách, podľa ktorých vzdelávanie je (upravené podľa [7]):

- Proces cieľavedomého uvedomelého sprostredkovania a aktívneho utvárania a osvojovania si vedeckých a technických vedomostí, intelektuálnych a praktických skúseností, utváranie morálnych rysov, osobitých záujmov a postojov.
- Proces utvárania osobnosti, individualizácie spoločenského vedomia, teda súčasť socializácie.
- Proces všestrannej humanizácie a kultivácie človeka zahrňujúci procesy ako je socializácia, inkulturácia a personalizácia, kde je zahrnutý široký rozvoj človeka.
- Proces všestrannej humanizácie človeka, pretváranie a zdokonaľovanie všetkých jeho schopností, zatiaľ čo výchova vštepuje predovšetkým základné návyky, určitú citovú orientáciu a je činnosťou podstatne jednoduchšou, ktorá do vzdelania organicky vplýva.

Kľúčové je teda posilniť vzdelávacích proces prvkami, vďaka ktorým porastú mäkké zručnosti. Tie sú základom vyššie uvedenej „socializácie, inkulturácie a personalizácie“. Povaha zmien sa ľahšie charakterizuje ako vzťah explicitných a tacitných poznatkov.

Význam manažment ako oblasti ľudského skúmania je daná tým, že sa nezaoberá iba otázkami typu ČO treba robiť, ale aj AKO prísť k riešeniu. Ak má byť cieľom „všestranná humanizácia a kultivácia človeka“ („čo“), treba sa analyzovať cesty k nemu („ako“). V článku budeme vychádzať z modelu SECI, ktorý vytvorili Nonaka a Takeuchi [8] a charakterizuje rast ľudských poznatkov ako výsledok interakcie tacitných a explicitných poznatkov (obr. 1).

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">Získané poznatky</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Tacitné</td><td>Explicitné</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Odovzdávané poznatky</td><td>Tacitné</td><td>Socializácia</td><td>Externalizácia</td></tr>
<tr><td>Explicitné</td><td>Internalizácia</td><td>Kombinácia</td></tr>
</table>

Obrázok 1: SECI model

Jednotlivé etapy prenosu poznatkov prebiehajú v smere pohybu hodinových ručičiek, pričom prvou je spravidla Socializácia.

Socializácia

Socializácia je zrejme najstaršou metódou získavania poznatkov. Známa je od praveku, dávno pred vynájdením ostatných spôsobov zaznamenávania a šírenia poznatkov. Spravidla má pomerne neformálny charakter: rozprávanie príbehov, dialóg, učňovská prax, koučing, mentorovanie a pod. Učiaci sa (žiak) počúva skúsenejšieho, sleduje jeho činnosť, premýšľa o nej. Poznatky sú neformálne a v rôznych situáciách môžu mať odlišné podoby. Úspech závisí od schopnosti „nájsť spoločný jazyk“ t. j. nadviazať zmysluplnú komunikáciu. Socializácia predpokladá buď rozprávanie príbehov a/alebo výmenu názorov, dialóg. V matematike by malo ísť o zadania, pri ktorých treba pochopiť kontext, bez ktorého by sa úloha nedala vyriešiť. Takéto úlohy a návod na ich vytváranie nájde čitateľ napríklad v [6]. Vítaným základom diskusie je nejednoznačnosť zadania.

Uveďme príklad: *Jedna kapela zahrá určitú skladbu za 5 minút. Ako dlho potrvá zahratie tejto skladby piatim kapelám?* Okrem „správneho“ riešenia (5 minút) existujú aj dve ďalšie. Ak budú hrať kapely po sebe, budú potrebovať 25 minút. Ak si však melódiu podelia na pätiny, bude im stačiť jedna minúta. Diskutovať výhody a nevýhody uvedených riešení môže byť cennou skúsenosťou nielen pre žiakov. Počas rozhovoru je vhodné upozorniť na vhodné i nevhodné používanie násobenia a delenia. Optimálne je dosiahnuť takú úroveň spoznania podstaty problému, pri ktorej žiaci sami vymyslia podobné absurdné či nezmyselné zadania.

To sa dá dosiahnuť i tak, že žiakov zapojíme do premýšľania o „nematematických" aspektoch pojmov, ktoré sa zdajú byť nepochybne matematické:

- Je číslo domu číslo?
- Čo všetko sa v dejepise vyjadruje číslami?
- Ktoré významné objavy sa udiali v rokoch, ktoré sú v histórii známe niečím iným?
- Je štatisticky významný rozdiel v dĺžke vládnutia kráľov a pápežov?
- Ako je možné, že rok 2021 je podľa židovského kalendára rok 5781 a podľa islamského 1443?

Dôležité je, aby pri socializácii prebiehal dialóg. Vďaka nemu bude vedieť učiteľ usúdiť, či a do akej miery žiak pochopil obsah.

Externalizácia

Externalizáciou poznatkov dosahujeme jej odosobnenie. Poznatok vyjadríme v neutrálnej symbolike – v podobe, ktorá nezávisí od podávajúceho – ako text, vzorec, mentálnu mapu, graf, zápis v notovej osnove, chemický vzorec atď. Učebnica napríklad predstavuje externalizovanú podobu istej skupiny poznatkov.

Zaznamenané poznatky sú vďaka tomu vhodné na širšiu distribúciu – prestanú byť viazané na miesto a okamih, v ktorom vznikli. Externalizácia má za cieľ preniesť určitú predstavu z hlavy do vonkajšieho sveta, zviditeľniť ju. Koniec-koncov už samotné rozprávanie má dohodnutú formu komunikácie – daný prirodzený jazyk. Kto mu nerozumie, nedozvie sa poznatok, ktorý je v ňom skrytý. V matematike je „jazykom" zápis do vzorca, geometrická konštrukcia alebo vytvorenie modelu. Keď napríklad vezmete do rúk čínsku učebnicu matematiky, písanému textu nebudete rozumieť, ale domyslíte si jeho obsah, lebo rozumiete číslam a vzorcom. Na druhej strane, bez znalosti (kon)textu sa ľahko dopustíte chýb podobných úlohe o váhe a rýchlosti koňa.

Treba si však uvedomiť, že aj mnohé ďalšie – pre učiteľa a šikovnejších žiakov jednoduché – predstavy môžu byť pre ostatných neľahké, spomeňme napríklad čítanie grafov. Vo vyučovaní matematiky by preto malo hrať oveľa významnejšiu úlohu „umenie externalizovať"', čiže vytvárať zápisy tak, aby im porozumel čo najväčší počet ľudí. Napríklad graf funkcie doplniť o vysvetľujúci text. Redundancia informácie totiž zvyšuje pravdepodobnosť správnej interpretácie. Aj preto, lebo žiakom a študentom umožňuje vytvoriť si väzby medzi matematickou abstrakciou a realitou bežného života.

Povedzme, na nadobudnutie predstavy o rôznych reálnych podobách čísla milión môže slúžiť úloha: *Koľko váži milión zrniek ryže a koľko milión eur?* Druhá časť úlohy je úmyselne nejednoznačná, aby ju bolo možné spolu so žiakmi spresňovať doplňujúcimi otázkami. Napríklad: *Budeme vážiť milión eur v bankovkách alebo v minciach? Čo bude vážiť viac: milión eur v jednoeurových minciach alebo v jednocentových? Pred zavedením eura varovala americká federálna banka pred vydaním dvesto- a päťsto-eurových bankoviek. Prečo? Kedysi existovali aj tisícdolárové bankovky, dnes sú najvyššími stodolárové – prečo?*

Podobne treba učiť externalizovať aj procesy, napríklad geometrické konštrukcie. V tomto smere nástroje ako Geogebra ponúkajú veľa príležitostí jednak na demonštrovanie procesov, jednak na ich precvičovanie. Externalizovaný poznatok totiž v sebe skrýva dva typy poznatkov: primárny (ten, kvôli ktorému externalizujeme) a sekundárny (formálne správny, prehľadný a zrozumiteľný zápis poznatku v danom špecializovanom „jazyku"). Cieľom externalizácie je teda nielen vytvoriť externý zápis poznatku, ale spraviť ho tak, aby bolo jednoznačne jasné, „čo chcel básnik povedať"'.

Žiakov to môžeme naučiť nielen tradičnými postupmi, ale postupmi „s pridanou hodnotou", napríklad opisom postupu alebo výsledku formou piesne, básne, scénky, poviedky,... Aby to dokázali, musia sa hlbšie zamyslieť nad svojou činnosťou. Zároveň sa (povedzme v tímovom projekte) môžu prejaviť aj žiaci, ktorí nemajú k matematike blízky vzťah. Výsledkom by malo byť kreatívne a zábavné zobrazenie zdanlivo nudného matematického objektu a/alebo postupu.

Externalizácia

So zápismi v externalizovanej podobe sa dá ďalej pracovať a tým rozširovať poznanie. Tento proces sa označuje ako Kombinácia. V rozvoji poznania hrá mimoriadnu úlohu. Celé časti matematiky sú postavené výlučne na nej. Formálne úpravy výrazov a geometrické konštrukcie sú typickými príkladmi premeny explicitných poznatkov na iné explicitné poznatky. Poznamenajme, že kombináciou v čistom slova zmysle sú iba vtedy, keď ich robíme „naslepo“, teda keď na daný výraz aplikujeme ľubovoľné pravidlo alebo spravíme zmenu v geometrickom zobrazení, ktorá neprotirečí princípom geometrie. Pochopiteľne, tak to nerobíme – vždy si vopred premyslíme, či je daná zmena aplikovateľná a vedie k zamýšľanému cieľu. Úvahy o aplikovateľnosti a jej dôsledkoch sú však tacitné poznatky. Aj z toho vidieť, že tacitné a explicitné poznatky sú často neoddeliteľné. Práve prítomnosť tacitných poznatkov robí z laika experta. Aj vtedy, keď majú expert a laik v nejakej oblasti porovnateľné množstvo explicitných poznatkov, expert má oveľa viac tacitných.

Kombinácia je v tradičnom vyučovaní matematiky zastúpená asi najsilnejšie. Príkladmi sú úpravy rovníc. Počas nich (a rovnako počas mnohých ďalších matematických zadaní) sa venujeme tomu, ako manipulovať so zadaným zápisom tak, aby sme získali iný ekvivalentný zápis, pokiaľ možno bližší k výsledku. Pointa je skrytá v podmienke „bližší k výsledku“. To, či sa úpravou približujeme k výsledku alebo vzďaľujeme od neho, je tacitný poznatok. Oživením vyučovania by bolo zobrať niektorý nie príliš jednoduchý vzťah, uplatniť na ňom rozmanité ekvivalentné úpravy – vždy iba jednu a vrátiť sa naspäť. Cieľom by malo byť vygenerovať z pôvodného výrazu čo najviac nových, vzdialených od neho „iba o jeden krok, jednu formálnu úpravu“. Až potom sa začať zaujímať, prečo niektoré transformácie považujeme za vhodnejšie a účelnejšie („rozumnejšie“) ako iné. Diskusia o týchto alternatívach by mohla priniesť zaujímavé zistenia o tom, čo rozumieme pod pojmom kombinácia a ako spoznať, či úpravy vedú alebo nevedú k riešeniu. Opäť je vhodné spoznávať procesy Kombinácie aj cez náplň iných predmetov. Dostatok materiálu pre humanitne orientovaných študentov poskytuje dejepis:

- Počet mŕtvych vo vojnách rastie s časom a rozsahom konfliktu, ako aj s použitou vojenskou technikou. Vyjadrenie týchto vzťahov grafmi zviditeľňuje nehumánnosť vojen.
- Vedné objavy a vynálezy súvisia so sociálnymi javmi. Príkladom je vzťah renesancia – zámorské cesty – vedecké objavy – reformácia. Vhodným zadaním je: Vyhľadajte, čo sa v danom období (napr. desaťročí) stalo v každej z uvedených oblastí.
- Usporiadajte tabuľky vládnutia kráľov a pápežov podľa veľkosti. Čím sa tieto grafy líšia? (Kráľom sa stáva spravidla priamy dedič. Medzi otcom a synom je vekový rozdiel, takže pravdepodobnosť dĺžky vládnutia sa riadi Poissonovým rozdelením. Pápež sa volí. Novozvolený pontifex je vysokom veku, takže často umiera krátko po dosiahnutí úradu. Doba vládnutia pápežov sa riadi exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti.)

Internalizácia

Počas Internalizácie sa formálne poznatky transformujú do mentálnych obrazov učiaceho sa. Expertmi sa stávame tým, že si svoje poznatky a skúsenosti internalizujeme, čiže hlboko osvojujeme. Novo nadobudnutému poznatku sa snažíme porozumieť a začleniť ho do doterajšieho systému poznatkov. Bez takéhoto zaradenia a zosúladenia a poznatkami v doterajšom systéme sa nadobudnutý poznatok ľahko stratí – v tom je podstata krátkodobej pamäte. Pokiaľ sa poznatok nevstrebe do vedomia a podvedomia, nebude jeho nositeľ schopný ho využívať, hovoriť o ňom, kriticky ho hodnotiť, oznamovať ho ďalším, teda spraviť súčasťou svojej znalostnej bázy.

Zvnútornenie poznatku a jeho zasadenie do osobnostného a spoločenského kontextu si vyžaduje istý čas. Náhlenie pri preberaní obsahu výučby môže byť učiacim sa viac na škodu ako na úžitok. Ak si aj ich budú pamätať, tak pravdepodobne iba v redukovanej podobe, bez potrebného kontextu.

Internalizácia je vlastne „hranie sa“ s poznatkom. Spoznávame ho z viacerých strán tak, aby sme našli vlastný prístup k nemu – ten, ktorý ho najľahšie uvedie do súladu s poznatkami, ktoré už máme. Pritom často dôjde k rekonštrukcii existujúceho systému, niečo modifikujeme, niečo odstránime atď. Predchádzajúce kombinačné hry umožňujú pochopiť podstatu internalizácie. Matematické poznatky sa najčastejšie internalizujú precvičovaním, existujú však aj ďalšie možnosti, napríklad využitie mentálnych máp. Ukážkou môže byť mentálna mapa, ktorá sa venuje súvislostiam násobenia a jej vetvy tvoria:

- Terminológia (súčin, činiteľ, násobok, ...)
- Typické úlohy (výpočet plochy, platba za niekoľko rovnakých výrobkov, objem telesa, ...)
- Metódy násobenia,
- Atď.

Porovnaním rôznych súvislostí a posúdením ich predností a nedostatkov si príjemca buduje vlastný pohľad na realitu. Pohľad na ne sa stáva osobnejším, z portfólia si vyberá tie, ktoré osobne považuje za kľúčové. Výsledkom je subjektívny pohľad, vďaka ktorému má každý z nás vlastnú, jedinečnú zostavu poznatkov. Pretože rovnako postupuje každý, v budúcnosti budú rôzni riešitelia s vysokou pravdepodobnosťou postupovať pri riešení rovnakej úlohy odlišne.

Záver

Tradičná výučba matematiky sa opiera o model: uvedenie novej látky – ukážky riešených úloh – riešenie úloh žiakmi. Žiaci tak získavajú prevažne explicitné poznatky s minimálnou podporou tacitných poznatkov. Získané tacitné poznatky sa spravidla úzko zamerané a týkajú riešenia formálnych zadaní. V SECI modeli to znamená pohyb v rámci jedného kvadrantu zo štyroch a teda redukciu zložitého poznávacieho cyklu. Nedostatok skúseností s ostatnými tromi aktivitami spôsobuje, že matematiku nevidia v kontexte. Uniká im jej zmysel a spoločenská úloha, vnímajú ju iba ako súbor formálnych operácií, teda ako súbor explicitných poznatkov. V lepšom prípade nadobudnú aj tacitné poznatky, tie však im spravidla nedovoľujú viac ako sa iba orientovať v tomto systéme.

Matematické vzdelávanie by si však malo klásť aj ďalší cieľ: ukázať väzby abstraktných matematických pojmov, úloh a riešení k reálnemu svetu, teda rozvíjať tie tacitné poznatky, ktoré dovoľujú ich vidieť za jeho objektmi a javmi. Na to je potrebné, aby sa učili o nich rozmýšľať aj inom kontexte než iba cez presne definované zadania s jednoznačnými riešeniami.

V článku sme ukázali možnosti, ako výučbu doplniť o takého úlohy. Ich spoločnou črtou je možnosť diskutovať o jednotlivých činnostiach. Tým sa posilňuje internalizácia, v mysliach žiakov vznikajú nové tacitné poznatky. Aby sa spresnili a upevnili, treba aby ich podiel na výučbe bol čo najväčší. To znamená, že nechceme odstrániť explicitné matematické poznatky, len ich ukotviť prostredníctvom tacitných tak, aby sa stalo zrejmým, že cieľom výučby nie je „matematika pre matematiku“.

LITERATÚRA

[1] Zuzana Hlavačková: Zamestnávatelia menia nároky, čoraz menej žiadajú odborné znalosti, Pravda, 1. 11. 2018, Dostupné na: https://uzitocna.pravda.sk/praca-a-kariera/clanok/489857-zamestnavatelia-menia-naroky-coraz-menej-ziadaju-odborne-znalosti/

[2] Jozef Kelemen, Petr Berka, Vladimír Bureš, Jana Horáková, Jozef Hvorecký: *Pozvanie do znalostnej spoločnosti*, Bratislava, Iura Edition, 2007, ISBN 978-80-8078-149-1

[3] Wikipedia: *Soft skills*. Dostupné na: https://en.wikipedia.org/wiki/Soft_skills

[4] Alena Lipovská, Jozef Hvorecký, Jozef Šimúth: *Virtuálna trieda – sprievodca adaptívnym online vzdelávaním*, Košice, Equilibria, 2014, ISBN 978-80-8143-142-5

[5] Lilla Koreňová: *Geogebra v príprave budúcich učiteľov matematiky na FMFI UK*, Zborník konferencie Aplimat, Bratislava, STU, 2015

[6] Jozef Hvorecký: *Matematika v kontexte*, Zborník konferencie Dva dni s didaktikou matematiky, Bratislava, FMFI UK, 2018, str. 49-56

[7] Wikipedia: *Vzdelávanie*. Dostupné na: https://sk.wikipedia.org/Vzdelávanie

[8] Ikujiro Nonaka, Hirotaka Takeuchi: *The Knowledge-Creating Company – How Japanese Companies Create the Dynamics of Innovation*, London, Oxford University Press, 1995

prof. RNDr. Jozef Hvorecký, PhD.
Vysoká škola technická a ekonomická
Okružní 10
CZ – 370 01České Budějovice
e-mail: hvorecky@mail.vstecb.cz

HRY S PRAVIDLY - VÝHODY A ÚSKALÍ

MICHAELA KASLOVÁ

Abstrakt Teoretické pasáže se prolínají s kazuistikami, příklady a přesahy teorie her do výuky matematiky. Příspěvek vychází z více jak třicetileté praxe práce s dětmi a žáky. V závěru jsou prezentovány hry s pravidly, na kterých lze sledovat vývoj práce s logickou strukturou.

1. Hra a její vymezení

Pohled na hru se vyvíjí nejen v závislosti na výzkumu, ale i na sociokulturním kontextu, jak ukazuje antropodidaktika a etnodidaktika matematiky (Např. P. Clanché). Slovo *hra* není snadné překládat, v rámci toho, jakou hraje popisovaná činnost roli v dané kultuře, může nabývat různých označení; např. angličtina play a game. V češtině vedle dětské hry a hry sportovní označuje rovněž divadelní představení, ať jde o drama, satiru, nebo komedii; v *psychologii či sociologii* najdeme slovo *hra* ve významu blízkém předstírání nebo manipulaci; *v ekonomii* je součástí strategie vyjednávání a taktiky s předstíráním nezávaznosti typické pro hru.

Holandský teoretik **J. Huizing** v publikaci ***Homo ludens*** (1938), zdůrazňoval u hry atributy: *svébytnost*, *autonomnost, duchovní rozměr,* vedle lidské hry zmiňoval i hru zvířat. Francouz **R. Caillois** v klíčové publikaci pro teorii her ***Les Jeux et les Hommes*** (1958) změnil pohled na hru v tom smyslu, že vnesl do teorie her i *psychologická hlediska* a pokusil se úplnou typologii her. Z matematického hlediska však nejde o třídění her, protože každou hru můžeme charakterizovat více způsoby, tedy zařadit ji do více z popsaných skupin. Tento problém přetrvává v publikacích o hrách dodnes (např. Koťátková). Caillois poprvé zmiňuje (kapitola *Les jeux et l´homme*) hry, které svým způsobem připravují hráče na život simulováním určitých situací. Tím možná navazuje na charakteristiku šachové hry jako přípravy na rozvoj schopností významných pro vedení války, uvažování o různých strategiích, větveným uvažováním ve více krocích dopředu.

Provedeme-li shrnutí, můžeme vymezit klíčový pojem: „***hra*** *je dobrovolná činnost, která přináší hráči radost, respektive určité uspokojení*.“ Ne všichni se shodují v dalších charakteristikách: „*Hra se vždy odehrává ve vymezeném prostoru s pravidly, jde o fiktivní situace, které nejsou předem fixní jako v divadelní hře, v jejím scénáři, nemá vliv na reálný život.*“ Jen málo autorů zdůrazňuje, že hra jako taková, respektive účast v ní se nedělá za peníze (to je již regulérní povolání jako profesionální fotbalista, i když mu radost může přinášet), ale u hry může jít o peněžní výhru jako o něco, co není zákonité, je podmíněno řadou faktorů a je zakotveno v pravidlech hry, případně i v legislativě. Hodnocení aktivity, zda jde o hru nebo ne, má přes řadu vymezení jistý *subjektivní charakter*.

Čistě matematický pohled na hry zaměřené na výhru najdeme v 17. století v korespondenci Francouzů **B. Pascala** a **P. de Fermat,** kteří *řešili míru šancí na výhru,* respektive *na zisk peněz ve hře o peníze.* Jsou považováni za zakladatele teorie pravděpodobnosti. Na ně navazují další nejen v souvislosti s vymezováním pojmu *hazardní hra*, ale otvírají problematiku spravedlnosti hry.

Celkem logicky se vymezují dva pojmy, a to strategie a taktika hry v souvislosti s hrami pro dva či více hráčů. **Strategií** v souladu s dalšími autory chápeme hráčovu volbu takových kroků, které v dané situaci využívají pravidel tak, že minimalizují šanci ne prohru daného hráče. Dle mých pozorování dětí (často dvojčat nebo žáků kamarádů) existuje **ochranitelská strategie.** Tím chápu záměrné chování hráče v rámci pravidel ve prospěch zvoleného spoluhráče, což může, ale také nemusí být záměrná volba vlastní chybné či nevýhodné strategie, či vytváření lepších podmínek pro spúoluhráče. Taktika má podobný cíl jako strategie. **Taktika** je hráčova volba kroků v rámci pravidel vycházející z pozorování a pochopení chování ostatních hráčů. Závěry z analýzy jejich chování ovlivňují hráčovu volbu kroků. S těmito pojmy operuje řada autorů i mimo hry, jako např. britský ekonom **K. Binmore** v publikaci ***Game theory*** (2007), kde zmiňuje navíc vliv *emocí* na průběh hry. K taktice patří i **mimikry**, jak zmiňoval již Caillois. Taktice se blíží chování žáka ve škole, který místo tvorby strategie řešení úlohy sleduje chování učitele a snaží se vcítit do toho, co by si asi tak učitel přál.

Vznik strategie vychází z přesvědčení hráče, že možnosti, které pravidla hry a herní situace nabízejí, nemají stejnou šanci na výhru (neprohru). První kroky v hledání strategie, dle mých letitých zkušeností v Klubu přátel matematiky, mohou probíhat intuitivně. Pokud je hráč schopen svá rozhodnutí ukládat do paměti a v opakovaných hrách vědomě zkušenosti uložené do paměti porovnávat a vyhodnocovat, jeho strategie krystalizuje. **Zrod vědomého hledání optimální strategie** závisí na řadě faktorů. Spouštěčem mohou být: vzor ve spoluhráči, často starším, nebo opakovaná prohra, pokud je hráč schopen prohru přijmout a pozitivně zpracovat, respektive pokud umí rozlišit mezi přáním a realitou. Sledování dětí mladších 8 let ukazuje, že tato schopnost není jen otázkou věku. Emocionálně ladění hráči nad 10 let výjimečně vykazují podobné reakce v momentě, kdy zjistí, že prohrávají, a přitom se celou dobu upínali pouze k výhře, jako by jiná možnost průběhu ani zakončení hry neexistovala.
V optimalizaci strategie někomu pomáhá si k tomu psát, kreslit, nebo mluvit. Ke *zvědomování* dochází rychleji a přechod k optimalizaci strategie výrazně podporuje *diskuse* k průběhu „tréninkové hry" nebo po ukončení hry ať již v rodině, tak v klubech. Jde o proces zobecňování a aplikace závěrů. Výjimeční jedinci v některých hrách objeví optimální herní strategii vhledem, tedy mají problém s argumentací, podobně jako je to v matematice. Žákům z herně nepodnětného prostředí pomáhá, slyší-li zkušeného hráče „myslet nahlas", klást si otázky; např. *Který kámen mám vybrat? Když … sem, pak …, ale …* .

K psychologii dětské hry přispěla i americká publikace **S. Millarové**, ***Psychologie hry*** (originál 1958), která prezentuje hru zvířat a otvírá prostor pro sledování her *ve vývoji jedince*, hry jako *metody učení*, v didaktice je oporou pro tzv. genetickou paralelu. Některé prvky výchovného vlivu hry na jedince najdeme např. ve skautském hnutí. V češtině najdeme první systematické konkrétní propojení her s jejich didaktickým efektem v charakteristice jednotlivých her (kdo, kolik hráčů, kde, s čím a co se rozvíjí) **M. Zapletala** v jeho čtyřdílné publikaci *Velká encyklopedie her* z osmdesátých let minulého století. Autor „třídil" hry do jednotlivých dílů podle prostředí, ve kterém se zpravidla realizují.

2. Didaktická hra

Autoři **B. Sutton-Smith a E. M. Avedon v** publikaci ***The Study of Games*** (1971) vymezili roli hry ve vzdělávacím procesu. Nový pohled přinesla **E. Opravilová** (2001) m. j. varovala před snahou učitelů o silné usměrňování hry směrem k didaktickým záměrům, což může přerůst až v manipulaci dítěte /žáka. Upozornila na možné nežádoucí důsledky původně dobrých úmyslů. Na to zareagoval ve svém článku **J. Slavík** (2001) a uvedl společnou reflexi učitele a žáků jako možnost překonávání manipulace.

Porovnáme-li vymezení hry a didaktické hry, pak je jisté, že nemusí plnit tytéž **cíle**, zatímco hlavním cílem hry je uspokojení zejména psychických potřeb účastníka, pak v didaktické hře je hlavním cílem posun v procesu učení. **Účastníci** hry se nazývají *hráči*, účastníci didaktické hry jsou *žáci, studenti,* případně děti v mateřské škole nebo *speciální pacienti* (jde-li o didaktickou hru v rámci léčby).

Analýzou dostupných didaktických her a publikací o didaktických hrách jsem dospěla k následujícímu vymezení (Kaslová, 2013): „***Didaktická hra nemusí naplňovat parametry hry****, hlavním cílem není uspokojení hráče, ale účastníků* ***posun v rozvoji*** *toho, co zadavatel aktivitou sleduje; např. rozvoj síly, postřehu, čtenářských dovedností, rychlosti a přesnosti výpočtu, opakování či prohloubení slovní zásoby, kooperace. Tento posun je více či méně sledován, někdy i hodnocen. Ve většině kultur nemůže účastník z didaktické* *vystoupit, podobně i účast v didaktické hře je většinou povinná…. Didaktická hra může za určitých podmínek plnit roli diagnostické aktivity.“*

3. Děti a hra

Pokud si děti hrají i samy, v průběhu vlastní hry dříve či později stanovují určitá pravidla, která se u předškoláků, vzhledem k jejich fluentnímu myšlení, mohou měnit, na předchozí dítě rychle zapomene. U starších včetně žáků je tendence záměrně vylepšovat pravidla tak, aby to tvůrci ve hře vyhovovalo, nebo aby je akceptovali zájemci o hru. Sledujeme-li hru dítěte, vidíme, že dítě hru jiných napodobuje, aniž by chápalo pravidla, nebo tvoří pravidla vlastní. Pak různými způsoby se dítě seznamuje s pravidly jiných, či pravidly autorských umělých nebo tradičních her. Definovala jsem 19 způsobů seznamování nového hráče s pravidly (Kaslová, 2013). Pokud si děti a žáci vysvětlují pravidla navzájem, využívají je čtyři a mají problém prezentovat je jako jednu strukturu a dělí je zpravidla do skupin, které řadí s ohledem na časový průběh hry, některé podmínky nebo významné termíny vynechávají. Nestabilnost pravidel lze vystopovat i u žáků, důvody se poněkud liší: horší paměť pro složitější pravidla, neschopnost pracovat se složenými výroky, vypočítavost a podobně.

Definovala jsem 19 způsobů seznamování s pravidly (Kaslová, 2013). Pokud si děti a žáci vysvětlují pravidla navzájem, využívají jen čtyři z nich a mají problém prezentovat pravidla jako jeden strukturovaný celek. Při prezentaci je dělí zpravidla do skupin, které řadí s ohledem na časový průběh hry, některé podmínky nebo významné termíny vynechávají. Přístup není jednotný, někdy mají žáci tendenci uvádět a vysvětlovat specifické situace hned na začátku, což v diskusi zdůvodňují obavou, aby na specifikum nezapomněli. Jen vyspělí jedinci začínají „neměnnou kostrou pravidel, následně navazují větvením a zakončují detaily či méně obvyklými situacemi, které někdy doplňují protipříklady.

Volná hra je hra, která není iniciovaná z vnější**.** Může být inspirovaná dostupným materiálem, předchozí zkušeností, náhodně vyslechnutým příběhem, sledovaným chováním v okolí, obdivovanou pozicí či rolí ve společnosti a podobně. Může být vyvolána specifickými potřebami jedince. Můžeme ji sledovat v mateřské škole, ve škole o přestávkách, ve školní družině či klubu, na škole v přírodě nebo na táboře při osobním volnu žáků. Sledovat dítě, žáka při volné hře je pro učitele významné. Volná hra vzhledem k (pre-) matematice (Kaslová, 2019) *„plní tři role: a)* ***poznávací****: nultou fázi práce s novým materiálem; b)* ***prohlubující****: směřuje k hlubšímu pochopení hry. Volná hra má jistou funkci tréninkovou, dává prostor pro prodloužení procesu učení. V určitých momentech lze pozorovat restrukturaci poznatků, zjednodušování ve smyslu zefektivnění kroků v řešení, vznik nových strategií. Pronikání i do relativně jednoduchých logických struktur chce čas, nejde o to, aby bylo dítě ve hře co nejdéle, ale aby mělo prostor také tuto strukturu zpracovat v momentě, kdy je s daným materiálem „samo“ bez spoluhráčů, nebo má možnost podmínky upravit a počet spoluhráčů redukovat po svém, což mu umožňuje právě volná hra. c)* ***diagnostickou****: pozorujeme-li dobře dítě ve volné hře, vidíme, jak, s čím a s kým, kde a jak dlouho si dítě hraje, jak u toho komunikuje, zda jde o repetici, nebo dochází k obměnám, jaký je ve hře progres, i kterým hračkám/hrám se vyhýbá.“* Pokud si dítě/žák pravidla nové hry zjednodušuje, signalizuje to, že pro něho byla hra obtížná, naopak přidává-li další podmínky, větvení, tento hráč se ve hře intelektově nudil; při respektování všech pravidel jde zpravidla o trénink, nebo snahu prodloužit dobu, kdy je ve hře úspěšný (opakování výhry). Někdy hráč mění hru pouze snížením počtu hráčů, nebo ji hraje jen sám, častěji si pak u toho povídá a jde o fázi hledání strategií, což lze pozorovat i v 9. r. ZŠ. Běžně jsem žákům nabízela k výběru hry na přestávky, či na závěr hodiny.

Nultá fáze práce s materiálem (Kaslová, 2006b) je moment, kdy má jedinec nutkání poznat nový materiál, což se projevuje různě (ohmatávání materiálu, manipulace, třídění, prohrabávání, házení, ťukání, okusování, shlukování, oddělování, rozebírání, skládání). Pokud dáme před žáka, dítě, hráče nový materiál a přitom chceme, aby zvládl pochopit pravidla a ještě je uplatnit, pak dostáváme jedince do vnitřního konfliktu: neví, čemu se věnovat dříve. Dochází k výpadkům pozornosti. *„Pokud chceme, aby se v interakci s daným materiálem jedinci rozvíjeli **v intelektově náročnější aktivitě**, je nutné, aby nejdříve prošli nultou fází práce s materiálem“.* Proto je vhodné poskytnou nový herní materiál k „prozkoumání“ ještě před zahájením hry. Čím mladší jsou hráči, tím déle před zahájením hry a opakovaně. Příliš dlouhé zkoumání může přejít ve hru s vlastními pravidly, což může fungovat jako blokátor po zavedení oficiálních pravidel zejména u dětí mladších 8 let, nebo u žáků s mentální retardací.

4. Pravidla hry

Pravidla hry tvoří **logickou strukturu** nezávisle na tom, jakým způsobem z možných 19 (Kaslová, 2013) pravidla prezentujeme. Její pochopení závisí mimo jiné na rozvoji mnoha schopností. Každé dílčí pravidlo, ze kterých se pravidla hry skládají, lze chápat jako kvantifikovaný výrok. Vazba mezi jednotlivými dílčími pravidly bývá nejčastěji ve vztahu konjunkce nebo ostré disjunkce. Přestože je možné v češtině některá slova vynechat, zejména velký kvantifikátor, hráči chápou danou logickou strukturu tak, že platí v dané hře vždy a za určitých okolností i všude. Logická struktura je obtížná na pochopení nejen dle počtu dílčích pravidel, ale i podle toho, jak jsou dílčí pravidla formulována, zda korespondují alespoň s pasivní slovní zásobou hráče, zda mají podobou souvětí a které spojky se v něm vyskytují. Obtížnost pochopení logické struktury pravidel dané hry ovlivňuje počet záporů, zejména záporek u sloves. Obtížné je napojení dílčího pravidla na základní kostru logické struktury tehdy, pokud představuje opatření pro výjimečnou situaci, respektive podmíněnou celou sérií dalších pravidel.

V jazykové oblasti nejde jen o pasivní slovní zásobu, ale plné pochopení významů slov i na principu komparace. Klíčové slovo je *možnost*, respektive možnosti. Šetření u budoucích učitelů ukázala, že nemají význam ukotven v plné šíři. Podobně slovo *uvažovat* (vážit možnosti dle určitých hodnotících kritérií) je někdy i v ŠVP či návodech ke hrám používán nevhodně. Specifická herní zásoba potřebuje podstatná jména (odborné termíny dané hry nebo typu her jako např. *pakl, líc, rub, tah*); přídavná jména (např. *sudý* hráč, *bílá, následující, správný, nepřípustný*); zájmena (např. *všichni, každý, nikdo, sám*); číslovky (např. *první, šest, trojnásobný, několik*); slovesa (např. *hoď, vyber, odlož, předej, posuň*); příslovce (např. *rovně, šikmo, vždycky, rychle*); předložky (např. *na, do, přes*), spojky (*a, ani, i, ale, dokonce, nebo*). Chápání pravidel někdy vázne neschopností hráče rozlišit významy sloves: *mohu* a *musím, nemohu* a *nesmím (*Kaslová, 2021*)*. K chápání logické struktury patří vnímání souvětí, citlivost na kvantifikátory, které se v pravidlech objevují skrytě a místo všichni se vyskytují vazby „hraje <u>*se*</u>“, „hraj<u>*eme*</u>“ „<u>*my*</u>“ ve významu: „*my všichni*“. Pochopení rozdílu mezi *nebo* a *buď – nebo*, pochopení společného logického významu (konjunkce) u spojek *a, i, dokonce, ale, ani-ani* záleží na kvalitě učitelovy práce s jazykem od předškolního a mladšího školního věku*, na podnětnosti prostředí,* kam patří **fáze zaposlouchání, kvalita čteného**. K fázi zaposlouchání se řadí i zaposlouchání se do „hlasitého popisu myšlenkových postupů“ (např. *Tak mám víc možností, která pro mne bude lepší, když …, ale pak …, no a co když ne …*). Zběhlost v užívání podmínkových souvětí může do jisté míry ovlivnit kvalitu tvorby strategií. To předpokládá, že hráč rozlišuje časový a podmínkový význam “*když*“. Specifický vliv na pochopení logické struktury má **chápání záporky** (*ne-*) u sloves a přídavných jmen (hráč, tah) *nehraje, nesmí, nejde, nemůže*, *nevhodný, nesprávný, nerovný apod.* Negativně působí na práci s pravidly přílišné akcentování protikladů ve výuce češtiny, které žáci zaměňují s procesem negace. Sledujeme-li tuto analýzu, nemůžeme přehlédnout, že na podobných jazykových problémech závisí i úspěšnost řešení matematických úloh, pochopení jejich zadání.

Stabilita pravidel, páce s podmínkou

Pokud sleduji hry s pravidly, mohu se zaměřit na míru jejich stabilnosti v čase a místě. **Proměnlivá** pravidla mohou být měněna tvůrcem, skupinou, nebo jejich uživatelem, pokud je v logické struktuře logická mezera (např. chybí podmínka). Objevit tuto mezeru není snadné tím spíš, že podobné mezery lze nalézt i v učebnicích matematiky. Ve světě existují hry se stejným názvem, ale pravidla jsou proměnlivá v závislosti na sociokulturním kontextu, i když díky internetu a globalizaci se i ve hrách vyskytuje tendence pravidla unifikovat a zbavit je národního či lokálního charakteru. **Stabilní** pravidla se nemění s plynutím času či změnou místa, nemění se hrací objekty, ani počet hráčů, pokud hra nepřipouští modifikace jejich počtu. Příkladem proměnlivé hry je lidové rozpočitadlo *Plave mýdlo po Vltavě, jakou barvu má?* Dotázaný hráč řekne barvu (*bílou, červenou, bleděmodrou*), co ž může být slovo o dvou až čtyřech slabikách, což hráči dopředu nevědí. Počet rytmických celků nelze předvídat. Proměnlivost může stát i na tom, jak rytmizuje text ten, který ho odříkává, zda po slovech, nebo slabikách, nebo to kombinuje. Stabilní rozpočitadlo má stabilní počet rytmických celků, a tak vzhledem k počtu hráčů lze předvídat, na „koho to padne“, jde o problém dělení se zbytkem, pokud jsme dopředu stanovili, kde začneme a kterým směrem budeme hráče rozpočítávat. Např. Kocouří rozpočitadlo od M. Černíka je na 16 dvouslabičných rytmických celků: *Jeden kocour, dva ko-couři a ten třetí oči mhouří, a ten čtvrtý hledá skrýš-, kdo se bojí bude myš-.* Jiné rozpočitadlo je na 15, některá jsou na 12. „Stabilní rozpočitadlo“ nehraje s náhodou, ale to si žáci i někteří dospělí neuvědomují. Najít souvislost mezi počtem rytmických celků, počtem rozpočítávaných a dělitelností je hezký matematický problém, start k experimentování. Užívala jsem stabilní rozpočitadla i ve výuce. Sledování 168 žáků 2. stupně ZŠ (2012-2018) ukázalo, že žáci ani po 14 dnech jejich užívání nepřišli bez nápovědy na tuto souvislost a až na výjimky chápali výběr prostřednictvím rozpočitadla jako díly náhody.

U her s pravidly vymezuji tři **základní typy** podle toho, jak pravidla fungují v průběhu hry: a) na zřetězení kroků (*Větší číslo*: já řeknu číslo, další hráč řekne větší; třetí hráč ještě větší atd.) b) na cyklu kroků (*Zajíček v své jamce*); c) na větvení kroků (*Červená bere*). Většina her pro starší žáky a dospělé stojí na jejich kombinaci.

Co ovlivňuje průběh a zakončení hry

Hry mohou být zaměřené na: a) Na pouhou účast ve hře (Pletla v kytku); b) Na dosažení cíle (Bláznivá křižovatka); c) Na pořadí hráčů na konci hry (Člověče, nezlob se); d) Na výhru (Dáma; Cukr, káva) e) Na neprohru (např. Černý Petr), f) Na prohru (Na Babu). Každý z nás je motivačně naladěn jinak a toto je jeden z důvodů, proč někteří se určitého typu neradi zúčastňují. Obecně oblíbené jsou hry a), b), e). Soutěživé typy preferují c), d). Specifický typ představují hráči, kteří na sebe rádi upozorňují, těm vyhovuje b), c), d), a dokonce i f). Z pohledu objevování strategie ve hře typu c) a d) se může učitel střetnout s připomínkami hráčů, dokonce odmítání účasti zejména zkušenějšími a nadprůměrnými žáky, kteří objevili nerovnost šancí na výhru. Jsou hry, které jsou nespravedlivé, výrazně znevýhodňují někoho z hráčů, šance na výhru je nízká. Zde se strategie většinou odhaluje relativně snadno. Jsou hry relativně spravedlivé, kde průběh hry může ovlivnit inteligence a zkušenost hráče. Některé hry jsou „mírně“ nespravedlivé, např. hra, kde je mírně zvýhodněn hráč zahajující hru. Dodatkovými pravidly lze nevýhody kompenzovat; např. hraním ve více kolech se střídáním zahajujícího hráče. Výsledky z se pak „sčítají“. Analýza her z daného pohledu může představovat i cestu k metakognici.

Vývoj užívání pravidel ve hře (Kaslová, 2013): a) **Intuitivně;** občas chybuje, někdy žádá o radu nebo bezdůvodně kopíruje rozhodování; **b) Zčásti vědomě,** v některých části hry vznikají první strategie, ne vždy; umí rozpoznat porušení některých pravidel spoluhráčem; akceptování možností, první uvažování, ještě může být podbarveno emocemi; **c) Vědomě a/b** (a) v návaznosti na jazykovědu a vztahy mez pravidly v dané struktuře: umí vysvětlit, zdůvodnit krok; vnímá pravidla téměř jako celek, své první strategie mění, nebo kopíruje strategie opakovaně vítězících hráčů, hodnocení hry je ještě subjektivní; (b) chápe (ne)existenci šance na výhru; sleduje příčiny a následky rozhodnutí a upravuje své strategie; je schopen o krocích diskutovat s ostatními; ve vrcholné fázi hodnotit objektivně průběh hry. (Kaslová *Hry nejen v matematice,* 2013). Postup do vyšší úrovně závisí na složení spoluhráčů (nejde-li o hru solitér) nebo skupiny dalších hráčů, kteří hru znají. Je-li rozdíl ve zrání hráčů příliš velký, nemusí to k posunu hráče přispět právě tak, jako když je skupina zcela vyrovnaná, záleží na zrání osobnosti účastníků. Nechávat mladšího spoluhráče permanentně vyhrávat je kontraproduktivní, je to lhaní. Na prohru si musí dítě zvyknout před dosažením 5 let, později se s tím vyrovnává hůř. Důležitý je vzor v chování, jak prohru přijmout podobně jako chybu v řešen matematické úlohy.

Vývoj práce s logickou strukturou pravidel je do značné míry shodný u všech věkových kategorií. Postup se liší jen tím, jak dlouho v dané fázi jedinec setrvá. Jsou tací, kteří ve vývoji procházejí skoky, či je obtížné momentální fázi u něho jednoznačně identifikovat pro řadu příčin jako je rychlost reakce nekomunikovatelnost, mimikry apod. **První fáze** je typická soustředěním se na jednu část logické struktury pravidel, či jen na dílčí pravidlo se zaměřením se na vlastní akci (tah, krok, odpověď, …) ve smyslu „teď a tady“ (typický presentismus a topismus). První fáze vrcholí v momentě, kdy si uvědomuje závislost svého rozhodování na akci protihráče a chápe rytmus střídání akcí účastníků hry. **Druhá fáze** je typická tím, že hráč pracuje se shluky dílčích pravidel (někdy jim přiřazuje i názvy), hráč sleduje i časoprostorové změny ve hře zejména vzhledem k vlastním přáním a záměrům (přetrvávající egocentrismus). **Třetí fáze** je o větším vnímání reakcí spolu/protihráčů a vnímání podmíněnosti kroků, rozhodování. Někteří žáci druhého stupně se dále než nakonec této fáze nedostanou. Rodí se první taktiky, pokud to hra umožňuje. Strategie jsou intuitivní, či nápodobou, často jen v dílčí rovině. **Čtvrtá fáze** je o předvídání kroků, co může a nemůže nastat, co v ten moment může či nemůže hráč udělat. Projevuje se např. tím, že hráč projevuje nahlas svá přání, napovídá spoluhráčům ve svůj prospěch a podobně. Zde se rodí první „rozumné“ strategie, i když ne obecně platné. **Pátá fáze** je typická tím, že hráč pracuje s pravidly ve větších celcích, přechod k vědomé práci se strategiemi, hráč je ochoten připustit omyl ve volbě kroku/ů, sem tam mu některá vazba, podmínka uniká, strategie jsou více vázány na dosavadní zkušenost, situaci. Dochází k užití taktiky, považuje-li ji hráč za čestnou, přípustnou. **Šestá fáze** se projevuje důslednou prací s logickou strukturou pravidel jako celkem, hráč hledá slabá místa jak u sebe, tak v pravidlech, tak i v rozhodování spoluhráčů, díky tomu i přehodnocuje vlastní rozhodování a vylepšuje strategie, provádí zdůvodněné autokorekce v představě, myslí ve více krocích dopředu a je schopen současně hodnotit dlouhodobější chování ostatních a sledovat jejich strategie, nikoli dílčí rozhodnutí.

Domino můžeme hrát klasické, nebo matematické, kdy k sobě přikládáme pole se stejným výsledkem. Sledujeme-li např. hráče u Domina, vidíme, že zpočátku se zaměří na jeden konec „položeného hada“ a hledají mezi svými kameny vhodný k přiložení. Pokud vhodný kámen neidentifikují, přestanou třeba i hrát a přenechávají tah dalšímu hráči, S větší zkušeností přecházejí k rozhodování typu: „když nejde přiložit k jednomu konci, zkusím to s druhým koncem“. Pokud jsou zaměřeni úzce na cíl, zbavit se co nejdříve všech hracích kamenů, pak je zde tendence i podvádět: hlavně odložit jakýkoli kámen. S větší zkušeností pak hráč zvažuje, zda lze přiložit k oběma koncům hada a v kterém případě je více možností. V lepším případě, která z více možností je výhledově nejvýhodnější (v případě 6;6 a 6;4 a 2;5 je nejvýhodnější přiložit první kámen). V další fázi hráč sleduje, které kameny jsou již položeny a uvažuje i o tom, které kameny má v ruce protihráč. Následně uvažuje, jak se asi bude hra vyvíjet, jak se může rozhodovat protihráč a jak na to lze reagovat, tedy přechází od zaměření na své kameny, k sledování herního kontextu a uvažování o soupeři. Uvědomuje si, že kontext bude spolurozhodovat o tom, který kámen odložit a proč. Máme-li nestandardní slovní úlohy, můžeme u některých vidět podobné reakce od prvního zaměření se na otázku k zvažování role kontextu a možností, jejich hodnocení a kontrole.

5. Hry ve výuce matematiky

Zařazení „hry“ do výuky matematiky může sledovat více cílů, např.: *kooperace, upevnění či aplikace znalostí, rozvoj paměti, orientace v rovině, v časoprostoru, zpřesnění řeči, vytvoření herní zkušenosti, jako startování prvních strategií s oporou o předvídání,* *větvené uvažování, rozvoj kombinačních schopností a tak dále.* To, zda bude daná aktivita pro účastníka didaktickou hrou, nebo hrou s převahou zábavy není plně dopředu identifikovatelné, proto ani zde toto nerozlišuji.

Výrazná účast emocí dle neurologů i psychologů (např. Atkinsonová) stimuluje amygdalu a brání tak racionálnímu zpracování podnětů, může spustit volné asociační myšlení: To znamená, že z pohledu vzdělávacího může za určitých okolností prožívaná didaktická hra působit kontraproduktivně. Na druhou stranu je možné, že se v běžné matematické úloze (gradované série) při procesu řešení může stát hledání výsledku výzvou, pak onen proces nese některé atributy hry, jak dokazují i mé zkušenosti. Emoce tedy mohou být příčinou chybovosti právě tak jako hybnou silou podporující např. výdrž v procesu řešení a měnit tak didaktickou hru či obyčejnou úlohu na hru.

Dvě učitelské strategie: A) zařazení hry, na kterou navážeme matematickými problémy, které těží z herní zkušenosti; B) zařazení matematických problémů, na které naváže hra. Hry zařazené do výuky někdy „zabírají“ hodně času, je vhodné o nich uvažovat i jako o domácích úkolech pro dvojice.

Řada: Vyplň mřížku čísla 1, 2, 3, 4, 5 tak, aby vedle sebe nebyla nikde čísla, která se liší o 1. Najdi všechna řešení. Za jedno řešení považujeme i takové, kde jsou čísla do mřížky umístěna v opačném pořadí. Za každé řešení je 1 bod. Hru lze rozšířit na obor do 6, do 10.

Obrázek 1: mřížka

Čtverec: Hra pro dva hráče (Kaslová) ve čtvercové síti typu 5x5: První hráč umístí dvě libovolná čísla od 1 do 5 tak, aby sousedila (v jednom řádku, nebo v jednom sloupci) a přitom se se tato sousední čísla lišila o víc než o 1. Každý hráč má dva tahy. V žádném sloupci, ani v žádném řádku se nesmí žádné číslo opakovat a sousední čísla se nesmí lišit o jednu. Druhý hráč musí k jednomu ze zapsaných čísel v tabulce dopsat číslo dle stejných pravidel, a druhé číslo umístit do mřížky kamkoli, aby neporušil daná pravidla. Takto se hráči střídají, dokud lze pravidla respektovat. Za každý „dokončený“ sloupec (zapsal do něho páté číslo), nebo řádek získává hráč bod. PO jisté době hráči zjišťují, že mohou zaujmout buď částečně kooperační strategii, nebo se blokovat. Ve fázi zobecňování dospívají k podobě „ideálně vyplněného čtverce“, což pro některé hráče znamená přejít od hry ve dvou k řešení hry jak solitéru. Je zajímavé pak „ideální řešení“ mezi sebou porovnat. Pro některé je zřejmá souvislost se hru Řada.

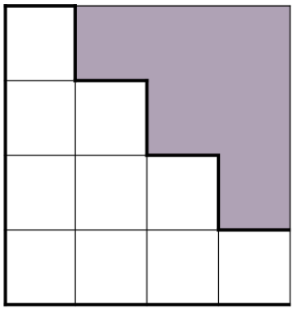
Quarto - autorská úprava: původní pravidla hry jsem upravila a převedla vítězství na bodovací systém. Kdo sestaví v jednom směru čtveřici (položí čtvrtý kámen v daném směru) a popíše jednu společnou vlastnost všech kamenů (barva, výška, tvar, nebo svrchní část), získá bod. Hra s 16 kameny pokračuje až do úplného pokrytí hracího pole 4x4. Pokud mají dané kameny v jednom směru více společných vlastností, získává hráč tolik bodů, kolik společných vlastností určí. Pokud jedním tahem doplní dvě nebo tři čtveřice, má šanci na více bodů naráz. Pokud ovšem společnou vlastnost neodhalí, vyzve protihráče k pokračování ve hře, mlže protihráč popisem vlastnosti získat bod, i když čtveřici nedoplnil.

Quarto číselné (Kaslová) se hraje v mřížce 4x4. Hráči střídavě vepisují čísla od 0 po 99. Kdo doplní čtveřici v řádku, sloupci nebo diagonále a určí společnou vlastnost (jednociferná čísla, lichá, ciferný součet je *n*; jsou dělitelná *m*; jsou větší než *a;* počet desítek je o *b* větší než počet jednotek na místě desítek je vždy *c* a podobně), pak získává bod. Jednou použitá společná vlastnost se nesmí opakovat. **Quarto – zlomky, desetinná čísla,**

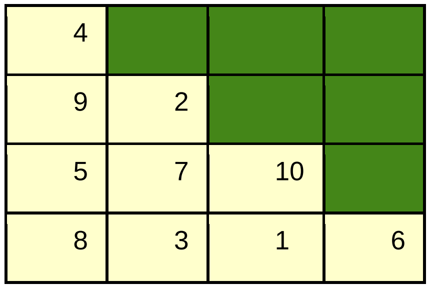
alegebraické výrazy (Kaslová) se hraje stejně, jen u algebraických výrazů nabízím lístečky s výrazy (místo hracích kamenů) a hráči se mohou vybrat.

Quarto solitér (Kaslová) Vyplňte dle výše uvedených pravidel čtvercové pole tak, aby v každém směru hráč mohl získat jeden bod. Zpravidla začínáme čísly od 0 po 500.

Mřížka - schody (autorská úloha Kaslová, 2007)



Obrázek 2: zadání



Obrázek 3: řešení číslo 1

Zadání: vyplňte čísla 1-10 do mřížky tak, aby vedle sebe nebyla čísla, která se liší o 1, nebo patří do stejné násobilky. Sousední pole jsou ta, co mají společnou stranu; dotek jen vrcholem nevadí.

6. Závěr

Vhodně volené hry ovlivní žákovu paměť nejen slovně akustickou a vizuální, orientaci v rovině či (časo)prostoru, vědomé porovnávání v představě, proces zobecňování, strukturaci poznatků, …. Hráčská zkušenost ovlivňuje šanci na hlubší pochopení logické struktury pravidel a její fungování, pochopení výhry ve vztahu k mentálnímu úsilí, což následně ovlivňuje i proces učení matematice. Hry mohou relativně snadno ukázat výhody učení se matematice, právě tak jako být nástrojem rozvoje schopností potřebných v matematice. Hledání vhodných strategií souvisí s přijetím existence chyb a hledání cest k jejich eliminaci. Radost ze hry není vedení k hazardu. Porozumění základům pravděpodobnosti ve vhodně volených hrách může sloužit jako jistá prevence neuváženého riskování.

LITERATURA

[1] Atkisonová, R. a kol. *Psychologie*. Praha: Portál, 2003, ISBN 80-7178-640-3.

[2] Callois, R. *Les jeux et les Hommes.* Paris: PUF, 1958. (bez ISBN)

[3] Kaslová, M. Úlohy vhodné pro nadprůměrné žáky 1. stupně, s. 58-62. In: Jirotková, D., Stehlíková, N. (Eds.) *Dva dny s didaktikou matematiky*. Praha : UK PedF, 2006a, ISBN 978-80-7290-345-0.

[4] Kaslová, M. Dévélopment des constructions chez les enfants agés de 1 a 8 ans. In *Proceedings CIEAEM 2006,* s. 289-292. Plzeň : ZČU, 2006b, ISBN 80-7043-478-3.

[5] Kaslová, M. Rozdíly ve strategiích řešení u devítiletých žáků. In Jaroslav Zhouf, (Ed.) *Ani jeden matematický talent nazmar,* s. 138-146. Praha : JČMF, 2007. ISBN 978-80-7290-332-0.

[6] Kaslová, M. *Hry nejen v matematice*. Text pro CŽV - U3. Praha, UK Pedf, 2013. (bez ISBN)

[7] Kaslová, M. Konektivní didaktické struktury v mateřské škole zaměřené na rozvoj (pre)logického myšlení. In V. Murcín (Ed.) *Matematika vo svetě předškoláka*, s.29–46. Bratislava : Pro-solution s.r.o. 2017a, ISBN 978-80-8139-111-8.

[8] Kaslová, M. *Didaktické hry v matematice, Inspirace pro výuku.* Text k projektu SC1. České Budějovice: JČU, 2017b. (bez ISBN)

[9] Kaslová, M. *Didaktické struktury založené na hrách zaměřených na rozvíjení předmatematické a matematické gramotnost*i. Sborník EME 2018.

[10] Kaslová, M. *Problematika předmatematické gramotnosti,* s. 1-6. Řízení školy MŠ/5, 2019. Praha : Kluwer, ISSN 2571-0591.

[11] Kaslová, M. *Fenomén času ve hrách.* Přednáška: 3. 11. 2021 konference Škola hrou, Praha.

[12] Kučera, M. a M. Klusák, *Dětské hry*. Praha : Karolinum, 2010, ISBN 978-80-246-1758-9.

[13] Millarová, S. *Psychologie hry.* Praha : Panorama, 1982. (bez ISBN)

[14] Opravilová, E. Úskalí didaktického využití hračky, s. 537 –540. In Pedagogika, 51, č. 4, 2001. ISSN 0031-3815.

[15] Slavík, J. Umění ve škole: jenom" hra, nebo téma pro reflexi? s. 525-536. *Pedagogika,* 51, č. 4, 2001, ISSN 0031-3815.

[16] Sutton-Smith, B. a E. M. Avedon *The Study of Games*. New York : J. Wiley, 1971. ISBN 0471038393.

[17] Zapletal, M. *Velká encyklopedie her.* 1.- 4. díl. Praha : Olympia, 1985-1988. (bez ISBN)

PhDr. Michaela Kaslová
UK PedF Praha
M. Rettigové 4
CZ – 116 39 Praha 1
e-mail: michaela.kaslova@pedf.cuni.cz

MONITORING NÚCEM 2021

TATIANA KOŠINÁROVÁ

ABSTRAKT. Vplyv dištančného vzdelávania na úroveň vedomostí a zručností žiakov 9. ročníka ZŠ z matematiky. Kritické miesta vo vyučovaní matematiky ovplyvňujúce úspešnosť ich štúdia na stredných školách. Potreba doučovania žiakov zo sociálne znevýhodneného prostredia a z rodín poberajúcich príspevok v hmotnej núdzi.

Úvod

V dňoch 31. mája až 11. júna 2021 zrealizoval Národný ústav certifikovaných meraní vzdelávania (NÚCEM) reprezentatívny prieskum monitorujúci priebeh dištančného vzdelávania a úroveň vedomostí a zručností žiakov 9. ročníka základných škôl a 4. ročníka gymnázií s osemročným vzdelávacím programom. Žiaci vypĺňali dotazník zameraný na ich skúsenosti s dištančnou online formou vzdelávania a riešili aj vedomostné testy z vyučovacích jazykov a z matematiky. Testy aj dotazníky žiaci vypĺňali elektronicky prostredníctvom platformy EduPage. Testy boli administrované v priebehu jedného týždňa, kedy si každá zo zúčastnených škôl mohla jednotlivé testy naplánovať na základe technických a personálnych možností. Priebeh administrácie testovania nebol realizovaný za prítomnosti externého dozoru, ktorý je bežnou súčasťou Testovania 9.

Základné zistenia[1, 2]

- V teste z matematiky dosiahli testovaní žiaci priemernú úspešnosť **56,4 %.** Dve tretiny testu tvoria úlohy s kontextom reálneho života. Žiaci v nich dosiahli vyššiu úspešnosť (58,8 %) ako pri úlohách s matematickým kontextom (50,7 %).
- Takmer polovica žiakov uviedla, že sa im predmet matematika učil horšie počas online dištančného vzdelávania.
- Tematický celok **lineárne rovnice a nerovnice (51,9 % opýtaných)** bol identifikovaný ako ten, ktorý by sa im lepšie učil v škole ako doma.
- Dve tretiny žiakov realizovali počas online vyučovania aktivity, ktoré s vyučovaním nesúviseli (napr. pozeranie filmov, online hry, chatovanie).
- Žiaci zo sociálne znevýhodneného prostredia (SZP) vyriešili v teste z matematiky úspešne o 9 úloh menej ako žiaci z prostredia bez znevýhodnenia, čo je silne vecne významný rozdiel.
- Silne vecne významný rozdiel sa preukázal aj v prípade výsledkov žiakov z rodín poberajúcich príspevok v hmotnej núdzi (RHN), v prospech žiakov, ktorých rodina nepoberá príspevok zo štátu.

Analýza a interpretácia výsledkov z matematiky

Test z matematiky písalo **11 629 žiakov**, 10 664 zo základných škôl, 900 z osemročných gymnázií a 65 zo stredných športových škôl (SŠŠ). Z celkového počtu vybranej testovanej populácie žiakov bolo 5 670 dievčat a 5 959 chlapcov, 906 zdravotne znevýhodnených, 317 z rodín poberajúcich príspevok v hmotnej núdzi a 255 zo sociálne znevýhodneného prostredia.

Testovaní žiaci dosiahli priemernú úspešnosť **56,4 %.** Test bol stredne obťažný. Vzhľadom na dlhodobý výskumný účel, nebude tento test zverejnený. Reliabilita (spoľahlivosť merania) bola 0,905. Test je vhodný na rozhodovanie.

Žiaci 9. ročníka ZŠ dosiahli úspešnosť 54,8 %, žiaci 4. ročníka SŠŠ 49,8 %. Žiaci 4. ročníka osemročných gymnázií dosiahli úspešnosť 76,0 %. Pre nich bol tento test ľahký.

Vybraná skupina žiakov so zdravotným znevýhodnením (7,8 % testovaných) písali rovnaký test ako intaktní žiaci. Žiaci so ZZ dosiahli úspešnosť 45,1 %.

Test z matematiky bol preložený do maďarského jazyka. Žiaci zo škôl s vyučovacím jazykom maďarským (6 % testovaných žiakov) dosiahli úspešnosť 46,8 %.

Žiaci zo sociálne znevýhodneného prostredia dosiahli úspešnosť 27,1 %. Žiaci z rodín poberajúcich príspevok v hmotnej núdzi dosiahli úspešnosť 28,9 %. Pre žiakov zo SZP a RHN bol test obťažný, rozdiel vo výsledkoch oproti žiakom bez sociálne znevýhodneného prostredia a z rodín nepoberajúcich príspevok zo štátu je silne vecne významný. Títo žiaci sú výrazne menej úspešní najmä v úlohách s kontextom reálneho života. Možno predpokladať, že majú menej skúseností s využitím matematiky v reálnom živote. Ich nižšiu úspešnosť spôsobuje aj to, že nedokážu čítať s porozumením, abstrahovať z textu informácie o množstve a vzťahoch. Nedokážu naplánovať stratégiu riešenia viackrokovej slovnej úlohy. Najmä žiaci zo SZP oproti žiakom bez SZP sú menej úspešní v úlohách obsahujúcich tabuľky a grafy.

Štruktúra testu zodpovedá špecifikácii[3] zverejnenej pre školský rok 2020/2021. V teste prevládali položky stredne obťažné a ľahké, reprezentujúce kľúčové učivo na výstupe zo základnej školy.

Takmer polovica položiek patrí do okruhov učiva *Čísla, premenná, počtové výkony s číslami* a *Vzťahy funkcie, tabuľky, diagramy*. Testovaní žiaci dosiahli v tejto oblasti úspešnosť 52,9 %. V tabuľke 1 je uvedené ich zameranie. Položky sú zoradené od najľahšej po najťažšiu.

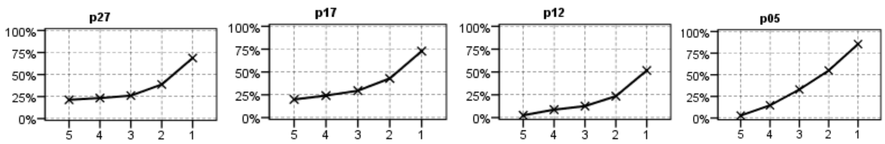
Tematický celok	**Testovaná zručnosť**
Percentá, promile	Uplatniť vedomosti o percentách pri riešení úlohy z praxe.
Mocniny a odmocniny	Zostaviť číselný výraz s mocninami a vypočítať jeho hodnotu.
Priama úmernosť	Riešiť úlohu z reálneho života napr. pomocou trojčlenky.
Pomer	Využiť pomer pri výpočte chýbajúcej dĺžky úsečky.
Počtové výkony s prirodzenými číslami	Riešiť viackrokovú slovnú úlohu z reálneho života v obore prirodzených čísel.
Počtové výkony s desatinnými číslami	Porovnať rozdielom hodnoty v eurách s využitím desatinných čísel.
Zlomky	Riešiť reálnu situáciu pomocou zlomkov.
Riešenie rovníc	Zostaviť a riešiť lineárnu rovnicu s jednou neznámou.
Premenná, výraz	Vyjadriť neznámu zo vzorca pre obvod obdĺžnika.
	Určiť hodnotu výrazu s premennou v obore celých čísel.
Priama úmernosť	Riešiť úlohu z reálneho života s využitím vedomostí o priemernej rýchlosti.
Riešenie lineárnych rovníc a nerovníc	Riešiť lineárnu rovnicu s viacnásobným výskytom premennej, ktorá má nekonečne veľa riešení.

Premenná, výraz	Reálnu situáciu zapísať pomocou výrazu s premennou.
Zápis veľkých čísel.	Využiť vedecký zápis čísla pri zápise objemu telesa.

Tabuľka 1: Čísla, premenná, počtové výkony s číslami a Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy

Zistili sme, že pri riešení úloh s kontextom reálneho života dokázali žiaci efektívne uplatniť vedomosti o percentách, vyriešiť primerané slovné úlohy na pomer, riešiť úlohy s využitím priamej úmernosti. Vo všetkých výkonnostných skupinách sa mierne zlepšila schopnosť vyjadriť časť celku pomocou zlomkov.

Na grafoch distribúcie úspešnosti (obr. 1) sú žiaci rozdelení do piatich rovnako veľkých výkonnostných skupín (VS). V uzavretých položkách p27 a p17 vidíme bezradnosť žiakov 3. až 5. VS. Potvrdilo sa, že žiaci nemajú na požadovanej úrovni osvojené základy algebry – nemajú vybudovanú schopnosť vyjadriť reálnu situáciu pomocou výrazov s premennou, chýba im zručnosť upravovať výrazy s premennou, zostaviť a riešiť jednoduché lineárne rovnice s jednou neznámou. Nedostatočne utvrdené vedomosti a zručnosti môžu byť pre mnohých žiakov zásadnou prekážkou v ďalšom štúdiu. V otvorenej položke p12 sa ukázalo, že žiaci nevedia použiť vedecký zápis čísla. Vyššiu vynechanosť sme zaznamenali v otvorenej položke p05, v ktorej mali žiaci využiť vedomosti o priemernej rýchlosti, čo podľa očakávania zvládli len žiaci 1. VS.



Obrázok 1

V tabuľke 2 je uvedené zameranie položiek okruhu *Geometria a meranie* zoradených od najľahšej po najťažšiu. V tejto oblasti dosiahli žiaci úspešnosť 57,9 %.

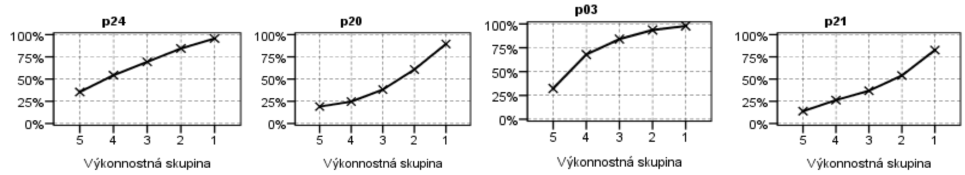
Tematický celok	**Testovaná zručnosť**
Uhol a jeho veľkosť	Analyzovať obrázok, využiť vlastnosti uhlov pri riešení kontextových úloh.
Objem kvádra v desatinných číslach, premena jednotiek objemu	Vidieť kváder v reálnom objekte a vypočítať jeho objem.
	Vypočítať objem telesa v tvare kvádra, porovnať s objemom telesa v tvare valca.
Povrch kocky	Z povrchu kocky vypočítať dĺžku jej hrany s využitím vedomostí o odmocninách.
Hranol, valec	Riešiť úlohy na rozvoj priestorovej predstavivosti.
Rovnobežník, obsah trojuholníka	Využiť vedomosti o uhlopriečkach štvorca pre výpočet jeho obsahu.
Obsah a obvod obdĺžnika	Prepojiť obsah a obvod obdĺžnika.
Súmernosť	Porovnať osovo súmerné útvary znázornené v štvorcovej sieti podľa počtu osí súmernosti.

Tabuľka 2: Geometria a meranie

Na grafoch distribúcie úspešnosti (obr. 2) vidíme, že testovaní žiaci boli úspešní v uzavretej položke p24, kde porovnávali objem telies v tvare kvádra a v tvare valca.

Využiť vedomosti o základných rovinných útvaroch v uzavretej položke p20 bolo ľahké pre žiakov 1. VS. Žiaci 3. VS riešili s vyššou úspešnosťou len štandardné úlohy, v ktorých boli jasné inštrukcie, čo majú vypočítať a aký matematický aparát majú použiť, napr. otvorená položka p03 zameraná na výpočet objemu kvádra.

Najťažšie bolo pre žiakov, najmä 3. až 5. VS, analyzovať osovo súmerné útvary p21.



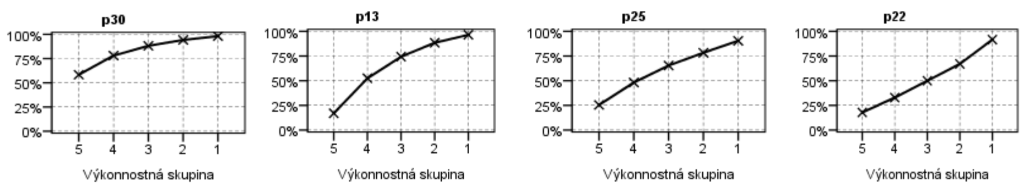
Obrázok 2

V tabuľke 3 je uvedené zameranie položiek patriacich do okruhov učiva *Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika* a *Logika, dôvodenie, dôkazy*. Testovaní žiaci dosiahli v tejto oblasti úspešnosť 60,9 %. Položky sú zoradené od najľahšej po najťažšiu.

Tematický celok	Testovaná zručnosť
Štatistika	Interpretovať údaje z kruhového diagramu.
Kombinatorika	Riešiť úlohu s kombinatorickou motiváciou.
Štatistika	Orientovať sa v tabuľke s nadbytočnými údajmi. Uplatniť vedomosti o percentách pri riešení úlohy z reálneho života.
	Prečítať a správne interpretovať údaje z grafu. Posúdiť pravdivosť tvrdení.
Pravdepodobnosť	Posúdiť istý a nemožný jav.
	Rozhodnúť o pravdepodobnosti jednoduchej udalosti.
Štatistika	Porovnať hodnoty znázornené v zloženom stĺpcovom diagrame.
Aritmetický priemer	Pracovať s aritmetickým priemerom v reálnej situácii.

Tabuľka 3: Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika a Logika, dôvodenie, dôkazy

Na grafoch distribúcie úspešnosti (obr. 3) vidíme, že posúdiť pravdivosť tvrdení na základe kruhového diagramu dokázali v uzavretej položke p30 aj žiaci 4. a 5. VS. Testovaní žiaci preukázali schopnosť správne interpretovať informácie uvedené v grafoch a v tabuľkách z primerane náročne spracovaných zdrojov napr. p13 alebo p25. Stredne obťažné bolo pre nich pracovať s aritmetickým priemerom v uzavretej položke p22.



Obrázok 3

Záver

Mimoriadne prerušenie školského vyučovania v školskom roku 2019/2020 a 2020/2021 prinútilo učiteľov a žiakov hľadať nové spôsoby učenia sa. Jednoduchšie to bolo pre učiteľov, u ktorých bol interaktívny spôsob vyučovania samozrejmosťou aj pred vypuknutím pandémie. Zvýšili sa nároky na technické vybavenie a internetové pripojenie škôl a rodín. Tabuľu, zošit a pero nahradili rôzne zariadenia, do ktorých bolo potrebné nainštalovať nové aplikácie. Prínosom tejto mimoriadnej situácie je, že sa zlepšila online komunikácia medzi učiteľmi, žiakmi a ich rodičmi, mnohí sa zdokonalili v zdieľaní dokumentov, v koordinácii práce skupín žiakov, v kontrole učebnej činnosti žiakov. Z dôvodu mimoriadnej situácie sa zredukoval počet hodín matematiky, čo sa negatívne podpísalo pod kvalitu vedomostí a zručností žiakov 9. ročníka ZŠ, ktorí budú pokračovať v štúdiu na strednej škole.

Je všeobecne známe, že žiaci zo sociálne znevýhodneného prostredia a žiaci z rodín poberajúcich príspevok v hmotnej núdzi mali sťažený prístup ku vzdelávaniu. V ich rodinách zvyčajne nie je možné vytvoriť vhodné podmienky na učenie. Napriek tomu, že ich najbližší príbuzní sú často nezamestnaní, chýba týmto žiakom podpora a vnútorná motivácia zlepšiť prípravu na vyučovanie. Musíme konštatovať, že slovenské školstvo nemá vytvorené podmienky na rovnaký prístup ku vzdelávaniu pre všetkých žiakov.

Vzhľadom na to, že matematika patrí k predmetom, ktoré sa ťažšie učia bez výkladu a sústavného precvičovania, vyžaduje prípadná kombinácia dištančného a prezenčného vzdelávania dôkladnú prípravu, aby preklopenie vyučovania do online podoby prebehlo bez zbytočných komplikácií a bolo efektívne. To si ale vyžaduje uvedomelý postoj všetkých zainteresovaných, aby žiaci v domácom prostredí neuprednostňovali iné lákavejšie činnosti pred sústredenou prácou.

Literatúra

[1] Ficová, L. a kol., 2021: *Monitoring NÚCEM 2021 – Zistenia o priebehu a realizácii dištančného vzdelávania formou online vyučovania*. Bratislava: NÚCEM.
Dostupné na:
https://www.nucem.sk/dl/5022/Monitoring_NUCEM_2021_Zistenia_o_priebehu_a_realizacii_distancneho_vzdelavania_formou_online_vyucovania.pdf

[2] Ficová, L. a kol., 2021: *Monitoring NÚCEM 2021 – Zistenia o úrovni vedomostí a zručností žiakov z matematiky, zo slovenského jazyka a literatúry a z maďarského jazyka a literatúry*. Bratislava: NÚCEM. Dostupné na: https://www.nucem.sk/dl/5021/Monitoring_NUCEM_2021_Zistenia_o_urovni_vedomosti_a_zrucnosti_ziakov_z_matematiky_slovenskeho_jazyka_a_literatury_a_madarskeho_jazyka_a_literatury.pdf

[3] NÚCEM, 2020: *Špecifikácia testu z matematiky.* Bratislava: NÚCEM. Dostupné na: https://www.nucem.sk/dl/4796/T9_2021_specifikacia%20testu_MAT_final.pdf

[4] NÚCEM, 2021: *Test z matematiky pre žiakov 9. ročníka ZŠ.* Bratislava: NÚCEM

Mgr. Tatiana Košinárová
NÚCEM
Žehrianska č. 9
SK – 85107 Bratislava
e-mail: tatiana.kosinarova@nucem.sk

HLAVOLAMY A SPOLOČENSKÉ HRY NA HODINÁCH MATEMATIKY

IVONA KOVÁČOVÁ

ABSTRAKT. *Hlavnou témou tejto pracovnej dielne bolo vyskúšať si riešiť rôzne hlavolamy a zahrať si spoločenské hry, ktoré môžeme využívať aj na hodinách matematiky.*

Zaujať deti tak, aby boli pre nich hodiny matematiky zaujímavé, je pomerne náročné. Aj keď nám súčasná doba ponúka veľa online nástrojov ako spestriť vyučovanie matematiky, občas je dôležité vypnúť technické zariadenia a spraviť si oddychovú hodinu so spoločenskými hrami. Nazývame to oddychovou, ale napriek tomu stále sa na hodine počíta matematika. Iným spestrením hodín sú tiež jednoznačne hlavolamy. Minulý rok sme spomínali elektronické verzie hlavolamov ako sudoku, kendoku a iné. [1]. tento rok si však chceme dať pauzu od elektronických prístrojov.

Stolové hry môžu žiakov inšpirovať hrať sa nielen na hodinách matematiky v škole, ale možno niektorý žiak presvedčí rodičov aj doma na hranie takýchto hier. Stačí si vybrať vhodné hry, ktoré okrem logiky rozvíjajú aj iné aspekty. Na trhu je samozrejme veľa rôznych hier, ktoré sa viac-menej hodia na matematickú hodinu. Na workshope sme si stihli zahrať dve hry.

Prvá hra – 6 bere

Jednou z možných hier je 6 bere. Na workshope sme si túto hru zahrali a potvrdilo sa, že prvé kolo hry je náročnejšie. Pri úplne prvom hraní treba rátať s dlhším časom na hru, aby žiaci pochopili všetky pravidlá. Neskôr je už hra svižná a rýchla a na jednej vyučovacej hodine sa dajú stihnúť aj dve opakovania. Hra je pre 2 až 10 hráčov a preto nie je nutné kupovať veľa kusov hry. Podľa autorov hry je vhodná pre hráčov od desiatich rokov.

Hráči majú na ruke 10 rôznych kariet. Každá karta má číslo od 1 do 104 a nejaký počet kravských hláv. Každý hráč si vyberie jednu kartu z ruky a potom ich všetci naraz otočia číslom nahor. Postupne spoločne umiestnia karty ku kartám, ktoré sú už položené na hracom stole. Žiaci by mali ovládať číselnú os, resp. vedieť porovnávať čísla a intuitívne budú pracovať s pojmom najmenší rozdiel. Skúsenosti z hry môžeme využiť aj pri zavádzaní pojmu interval. Koho karta sa prikladá ako šiesta v poradí, si musí zobrať prvých päť kariet, s ktorými už ďalej nehrá. Po uložení všetkých kariet, ktoré mali hráči na ruke, si každý hrá spočíta počet kráv na kartách, ktoré musel zobrať. Hráč s najmenším počtom kráv je víťaz.

Hra deti veľmi baví, je rýchla a zároveň si vyžaduje istú mieru taktiky, aj keď spoluhráči občas môžu vaše plány pokaziť. Žiaci sa musia vedieť vysporiadať s prehrou. Niektorí žiaci si občas povedia, že v hre bude ich cieľom nazbierať čo najviac kráv a urobia všetko pre to, aby uspeli. Hra tak získa inú atmosféru.

Druhá hra – Ježkove oči

Druhou hrou, ktorú sme si na workshope zahrali, bola hra Ježkove oči. Ide tiež o kartovú hru, v ktorej hráči majú na ruke 8 kariet a ďalších 12 v osobnom dokladacom balíčku. Postupne karty dokladajú ku kartám na stole. V tejto hre však hráči majú zbierať karty podľa farby, tak aby na konci hry mali z každej farby ideálne dve karty. V hre je hlavným heslom:

Tri je príliš! Dva je magické číslo. Na konci hry hráči spočítavajú body za nazbierané karty a hráč s najvyšším počtom bodov je víťaz.

Hra rovnako rozvíja logické myslenie, zlepšuje schopnosť porovnávania čísel a vyžaduje vhodnú taktiku. Hru môžu hrať 2 až 4 hráči od veku 10 rokov.

Z osobných skúseností vieme povedať, že žiaci majú veľmi radi hranie spoločenských hier a vždy sa tešia, keď svojho učiteľa vidia prichádzať s hrami pod pazuchou. Veríme, že dobrý pocit z takejto hodiny, ich naštartuje a ich výkony pri bežných vyučovacích hodinách budú lepšie.

LITERATÚRA

[1] Ivona Kováčová: *Dva dni s didaktikou matematiky 2020*, Bratislava, FMFI UK BA, 2020, ISBN 978-80-8147-095-0

Mgr. Ivona Kováčová
FMFI UK BA, Mlynská dolina
SK – 84248 Bratislava
e-mail: ivona.demcakova@gmail.com

FERMATOVA OBĽÚBENÁ ÚLOHA

ZBYNĚK KUBÁČEK

ABSTRAKT. *Úlohu „do gule vpísať valec s maximálnym povrchom" vyriešil Fermat niekedy pred r. 1636 postupom blízkym dnešnému diferenciálnemu počtu. V jeho spisoch však nájdeme aj riešenie, ktoré používa len prostriedky súčasnej stredoškolskej matematiky.*

Zadanie

Úloha

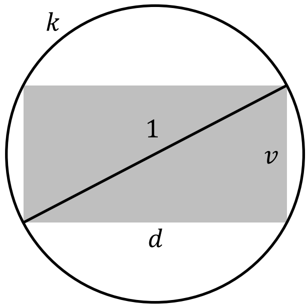
do gule s polomerom R *vpísať valec s maximálnym povrchom* (1)

má v známej Demidovičovej zbierke úloh z matematickej analýzy číslo 1570. Ničím sa neodlišuje od zadaní, ktoré ju obklopujú – všetky sú typu *nájdite niečo vpísané do niečoho iného, čo má najmenší/najväčší povrch/obsah ...* . Preto môže prekvapiť, že práve tejto úlohe venoval zvýšenú pozornosť Pierre Fermat (1607-1665):

- hneď prvý list, ktorý napísal 26. 4. 1636 Marinovi Mersennovi (ten udržiaval písomné kontakty s viacerými významnými matematikmi – napr. Descartesom, Robervalom, otcom a synom Pascalovcami – a jeho korešpondenčná sieť mala veľký význam pre ich vzájomné informovanie), obsahuje žiadosť, aby Mersenne túto úlohu (spolu s ďalšou podobnou o vpísanom kuželi) predložil na riešenie „najšikovnejším matematikom" (to – ako tvrdia historici – bol typický Fermatov štýl: predložiť iným na riešenie úlohy, ktoré sám vyriešil),
- úlohy opäť pripomína v liste Mersennovi z 15. 7. 1636 („bol by som rád, keby pán de Roberval pracoval na otázkach, ktoré som Vám navrhol"),
- v liste Étiennovi Pascalovi a Robervalovi z 23. augusta 1636 obidva problémy (o vpísanom valci a vpísanom kuželi) uvádza ako príklad úloh, ktoré vyriešil pomocou svojej metódy maxím a miním, ktorú si váži „viac ako čokoľvek iné" (pre záujemcov uvádzame formuláciu úlohy (1) z tohto listu: *Datæ sphæræ inscribere cylindrum omnium inscribendorum ambitu maximum*).

Dnešné riešenie

Dnes úlohu (1) nájdeme v zbierkach k diferenciálnemu počtu v časti venovanej hľadaniu extrémov a pri jej riešení pravdepodobne použijeme štandardný postup (najmä, ak sme už predtým vyriešili niekoľko podobných problémov):



Obrázok 1: ak v je výška a d priemer vpísaného valca, tak $v^2 + d^2 = 1$

- *nájdeme funkciu, ktorej extrém hľadáme*

  Ak má kružnica priemer 1 a vpísaný valec má priemer d a výšku v, tak povrch valca je $2\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \pi dv = \frac{\pi}{2}(d^2 + 2dv)$ a $v = \sqrt{1 - d^2}$ (pozri obr.1), stačí teda hľadať maximum funkcie

  $$f(d) = d^2 + 2dv = d^2 + 2d\sqrt{1 - d^2}$$

  na intervale $(0; 1)$.
- *zistíme, kedy má táto funkcia nulovú deriváciu*

  $$f'(d) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2d + 2\sqrt{1 - d^2} - 2d \cdot \frac{d}{\sqrt{1 - d^2}} = 0,$$

  odtiaľ postupne $d + \frac{1-2d^2}{\sqrt{1-d^2}} = 0$, $\frac{2d^2-1}{\sqrt{1-d^2}} = d$, $4d^4 - 4d^2 + 1 = d^2(1 - d^2)$, $5d^4 - 5d^2 + 1 = 0$, $d^2 = \frac{5\pm\sqrt{5}}{10}$, $d = \sqrt{\frac{5\pm\sqrt{5}}{10}}$, pritom koreňom pôvodnej rovnice je iba $d = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$.
- *vyhneme sa častej chybe („keď v zadaní povedali, že máme hľadať maximum a my sme našli jediný stacionárny bod, tak to musí byť hľadané riešenie“) a skontrolujeme, že sme skutočne našli maximum*

  Jedna z možností: využijeme, že na uzavretom intervale $[0; 1]$ musí mať spojitá funkcia f globálne maximum aj minimum. Z predchádzajúceho kroku vyplýva, že jedinými kandidátmi sú hodnoty $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ a $f\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\right) = \frac{5+\sqrt{5}}{10} + 2 \cdot \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{10}} = \frac{5+\sqrt{5}}{10} + 2 \cdot \sqrt{2}$, z nich najväčšia je hodnota v bode $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ (mohli sme postupovať aj menej „štýlovo“ a hodnotu $f\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\right)$ vypočítať na kalkulačke). Poznamenajme, že „štandardným postupom“ pomocou druhej derivácie

  $$f''(d) = \cdots = 2\left(1 + \frac{2d^3-3d}{\sqrt{(1-d^2)^3}}\right), \qquad f''\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\right) = \cdots = -5\left(1 + \sqrt{5}\right)$$

  (za tromi bodkami ... v druhej rovnosti sa skrýva niekoľko riadkov úprav, o správnosti ktorých sme presvedčení hlavne preto, že to tak pekne vyšlo ☺) by sme zistili len to, že v bode $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ má funkcia f *lokálne* maximum a museli by sme overiť, že toto maximum je aj *globálne*.

  Takto dospejeme k riešeniu $d = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$, $v = \sqrt{1 - d^2} = \sqrt{1 - \frac{5+\sqrt{5}}{10}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ a ak sme úlohu brali len ako prostriedok na precvičenie derivovania a aplikácií diferenciálneho počtu, asi sa nad výsledkom nebudeme veľmi zamýšľať a pobežíme riešiť ďalšie zadanie. Ako uvidíme, Fermata výsledok zaujíma a vie o ňom povedať čosi navyše.

Fermatovo riešenie

Hoci Fermat sa o úlohe (1) zmieňuje v súvislosti so svojou metódou maxím a miním (ktorá má veľmi veľa spoločných čŕt s dnešným derivovaním), uvádza v svojom rukopise z 10. 11. 1642 aj iné riešenie.

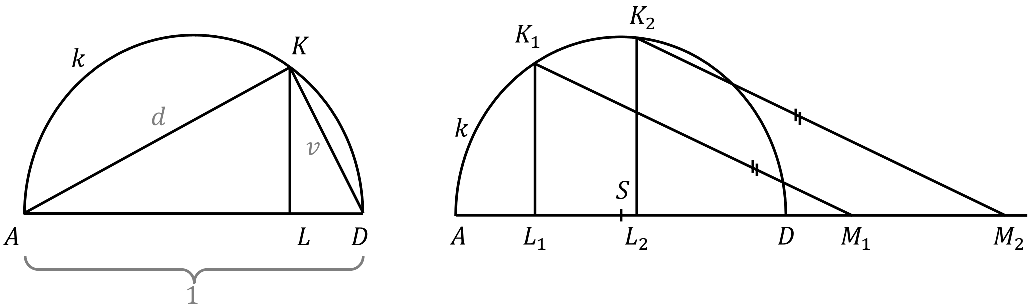
Ako už vieme, povrch valca je $2\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \pi dv = \frac{\pi}{2}(d^2 + 2dv)$, pritom podľa Euklidových viet (pozri obr. 2 vľavo)

$$(d^2 + 2dv) = |AD| \cdot |AL| + 2 \cdot \sqrt{|AD| \cdot |AL|} \cdot \sqrt{|AD| \cdot |LD|} =$$

$$= |AD| \cdot |AL| + 2|AD| \cdot \overbrace{\sqrt{|AL| \cdot |LD|}}^{=|LK|} = |AD| \cdot (|AL| + 2|LK|).$$

Stačí preto

nájsť maximum výrazu $|AL| + 2|LK|$. (2)



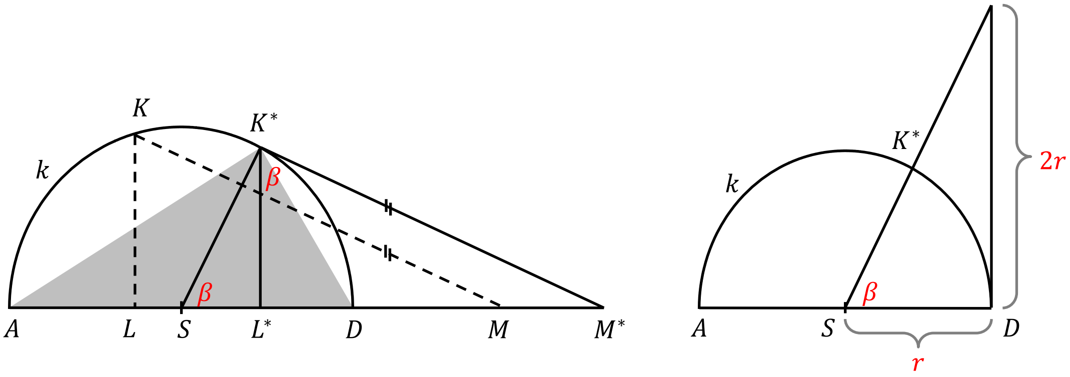
Obrázok 2: $d^2 = |AK|^2 = |AD| \cdot |AL|$, $v^2 = |KD|^2 = |AD| \cdot |LD|$ *(vľavo),*

$|AL| + 2|LK| = |AL| + |LM| = |AM|$, *a teda* $\frac{|KL|}{|LM|} = \frac{1}{2}$ *(vpravo)*

Ak na úsečke AD zvolíme bod L a na polpriamke LD nájdeme M tak, aby platilo $|LM| = 2|LK|$, a teda $|AM| = |AL| + 2|LK|$, tak všetky úsečky KM budú rovnobežné (lebo v každom trojuholníku KLM platí $\frac{|KL|}{|LM|} = \frac{1}{2}$, pozri obr. 2 vpravo, na ňom sme zvolili dve rôzne polohy L_1 a L_2 bodu L). Preto úloha (2) je rovnocenná s úlohou

na úsečke AD *nájsť bod* $L = L^*$*, pre ktorý je dĺžka* $|AM| = |AM^*|$ *maximálna*

(čitateľovi odporúčame, aby riešenie najprv našiel sám a až potom čítal ďalej). Ak hľadaný bod je $L = L^*$, tak K^*M^* musí byť dotyčnica kružnice k, pričom $\frac{|K^*L^*|}{|L^*M^*|} = \frac{1}{2}$, pozri obr. 3 vľavo. Z podobnosti pravouhlých trojuholníkov $K^*L^*M^*$ a SL^*K^* potom vyplýva $|SL^*| = \frac{|K^*L^*|}{2}$, odtiaľ $|SL^*| = \frac{|SK^*|}{\sqrt{5}}$, teda v našom prípade – keďže sme zvolili $|SA| = \frac{1}{2}$ – platí $|SL^*| = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$. Čitateľovi (ochotne) prenechávame kontrolu, že toto riešenie je totožné s riešením, ktoré sme našli použitím derivácií.

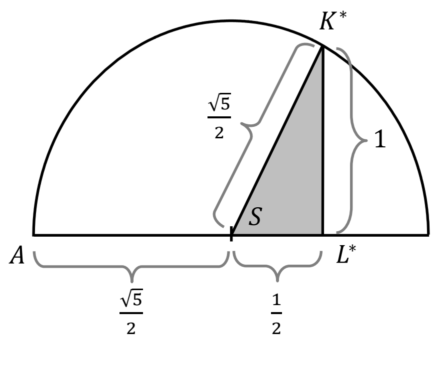


Obrázok 3: pre hľadaný bod L^* platí $\frac{|SL^*|}{|L^*K^*|} = \frac{1}{2}$ (vyplýva to z podobnosti $\Delta K^*L^*M^* \sim \Delta SL^*K^*$, pozri obr. vľavo), túto informáciu možno využiť pri konštrukcii bodu K^* (obr. vpravo).

Fermat v svojom riešení ešte uvádza, že $|AK^*|$ a $|K^*D|$ (teda priemer a výška nájdeného valca) sú v pomere zlatého rezu. Možno to overiť výpočtom: z podobnosti pravouhlých trojuholníkov AK^*D a AL^*K^* vyplýva

$$\frac{|AK^*|}{|K^*D|} = \frac{|AL^*|}{|L^*K^*|} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}}{\frac{2\sqrt{5}}{10}} = \frac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Overiť však ešte neznamená pochopiť, hľadanie odpovede na otázku „odkiaľ to Fermat mohol vidieť?“ je samozrejme len fantázia autora: V pravouhlom trojuholníku SL^*K^* je pomer dĺžok odvesien $1{:}\frac{1}{2}$. Takýto trojuholník sa vyskytuje v dvoch slávnych konštrukciách súvisiacich so zlatým rezom: v Herónovej a Ptolemaiovej, ďalej pozri obr. 4.



Obrázok 4: ak zvolíme $|L^*K^*|$ za jednotku dĺžky, tak $|SL^*| = \frac{1}{2}$, $|AS| = |SK^*| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $|AL^*| = |AS| + |SL^*| = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, teda $\frac{|AL^*|}{|L^*K^*|} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

LITERATÚRA

[1] Demidovič, B. P: *Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu. 13-e izdanije, ispravlennoje*, Moskva, Izdateľstvo Moskovskogo universiteta – Izdateľstvo ČePo, 1997, ISBN 5-211-03645-X

[2] Tannery, P., Henry, Ch. (eds.): *Œvres de Fermat. Tome premier*, Paris, Gauthier-Villars et fils,1891.

[3] Tannery, P., Henry, Ch. (eds.): *Œvres de Fermat. Tome troisième*, Paris, Gauthier-Villars et fils,1896.

doc. RNDr. Zbyněk Kubáček, CSc.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
e-mail: kubacek@fmph.uniba.sk

LOL AKO ZADANIE MATEMATICKEJ ÚLOHY

EMÍLIA MIŤKOVÁ

ABSTRAKT. *Príspevok ponúka sadu piatich úloh o telesách z kociek, v centre je úloha s čitateľným zadaním LOL. Tiež obsahuje ďalšie tri námety z oblasti stereometrie.*

Úvod

V čase dištančnej výuky (možno o kúsok viac ako pri prezenčnej výuke) nám matematické úlohy so zaujímavými zadaniami mohli byť nápomocné. Udržať záujem žiaka (študenta) aj v prípade jeho náročného rozvrhu, aj po tom, ako niekoľko hodín strávil „za počítačom", nemusí byť jednoduché. Mnohí učitelia sme hľadali vhodné aktivizujúce metódy aby žiaci premýšľali, úlohy riešili, (napriek únave a častej pohodlnej „online pasivite") vzájomne komunikovali a spolupracovali. A práve jednou z možností, ako aktivizovať žiaka je ponúknuť mu také zadanie matematickej úlohy, ktoré je niečím zaujímavé, nezvyčajné. Napríklad prepája dve známe oblasti.

Ukážeme si to na príklade úloh zo stereometrie.

Sada úloh o telesách z kociek

V ponúkanej sade piatich úloh (Obrázok 1, Obrázok 2) je jadrom tretia úloha, ktorej zadanie vzniklo ako prvé a dala názov celému príspevku.

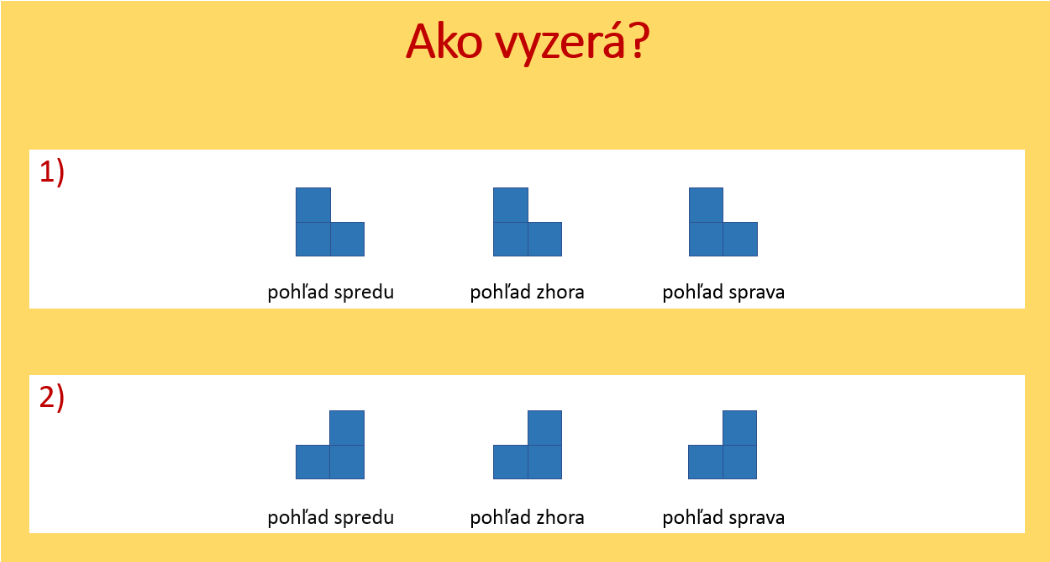
Neskôr pridané prvé dve úlohy majú za cieľ (na menšom rozmere) zachytiť prípadné nejasnosti žiakov pri riešení úloh o telesách z kociek a môžu tiež ponúknuť priestor na rozhovor akým spôsobom znázorníme riešenie (napr. GeoGebra, 3D nákres, plán, „po poschodiach", prípadne inak). Hoci sú v oboch úvodných úlohách pohľady na telesá z kociek L-kové, tieto telesá sú rôzne. (To môžeme použiť na rozhovor o priemetoch, symetrii, prípadne so žiakmi realizovať úpravu zadania – „pohľad sprava" v druhej úlohe nahradiť „pohľadom zľava".)

V zadaní tretej úlohy sa vyskytujú tri písmená – skratka. Táto úloha by mohla byť zaujímavo zadaná aj ako „prekvapenie" pre žiakov - zapísaná na tabuli (Obrázok 3) s otázkou, či aj toto by podľa nich mohlo byť zadaním matematickej úlohy. Po predchádzajúcom riešení prvých dvoch úvodných úloh (alebo iných úloh o telesách či stavbách z kociek) by objavenie, že ide o už známy spôsob zadania, mohlo byť príjemné. Skratka LOL má viacero významov, od najrozšírenejšieho internetového slangu „laughing out loud" až po „lots of love" či „League of Legends". Aj vďaka tejto rozmanitosti by zadanie mohlo byť zaujímavé pre viacerých žiakov.

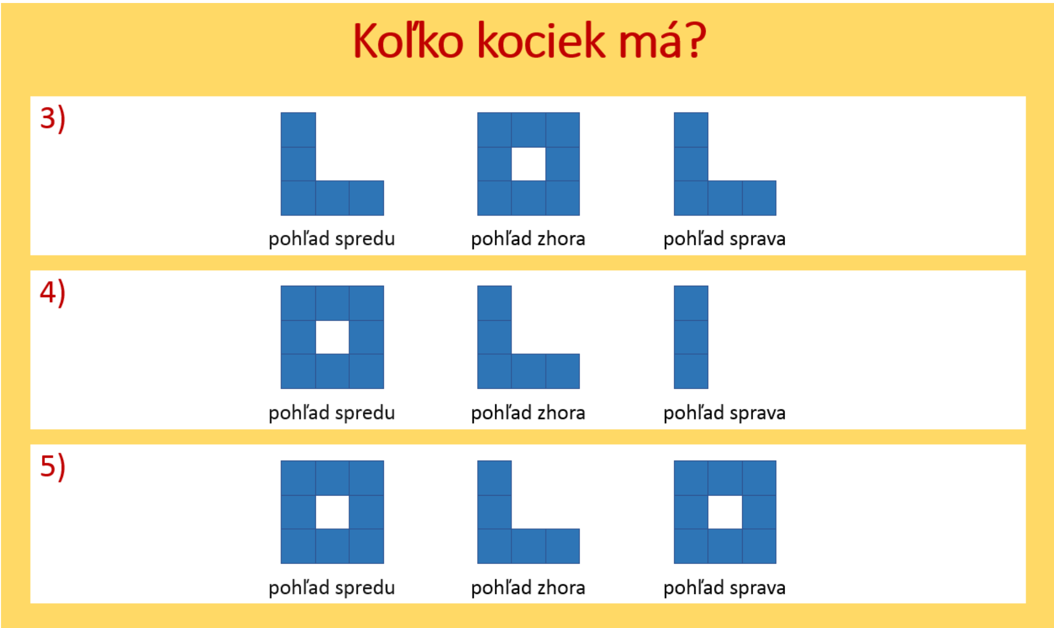
Štvrtá a piata úloha majú tiež „čitateľné" zadanie a sú do pätice doplnené hlavne z dôvodu diskusie o počte riešení. (Či také teleso existuje. Ak existuje, či je počet kociek jednoznačný. Ak nie, aký je najmenší možný aby teleso existovalo atď.) [13]

Okrem písmen L, O, I sa samozrejme vieme zamyslieť (a mohla by to byť úloha priamo pre žiakov), aj nad použitím iných písmen (C, X, atď.) v zadaní takýchto úloh.

[13] Pri tretej, štvrtej a piatej úlohe sme predpokladali, že stena kocky „lepí" a požadovali sme dotyk aspoň stenou (dotyk hranou či vrcholom nestačí).



Obrázok 1



Obrázok 2

Obrázok 3

Ďalšie námety zo stereometrie

Z hľadiska Vzdelávacieho štandardu by sme ukážku sady piatich úloh o telesách z kociek zaradili (predovšetkým) do tematického okruhu Geometria a meranie. Do stereometrie by sme mohli zaradiť aj ďalšie zaujímavé úlohy, ktoré popri úlohách o telesách z kociek spomenieme aspoň ako námety: priestorové bludiská [1], prechádzky kocky [2],[3] a hlavolam s farebnými kockami [4].

LITERATÚRA

[1] Hejný, M., Niepel, Ľ.: *Šestnásť matematických príbehov*, Bratislava, Mladé letá, 1983

[2] Javorková, P.: *Rozvoj priestorovej predstavivosti žiakov druhého stupňa ZŠ* [Diplomová práca], Bratislava, Univerzita Komenského v Bratislave, 2021

[3] Molnár, J., Perný, J., Stopenová, A.: *Prostorová představivost a prostředky k jejímu rozvoji* [online]. Praha : JČMF, 2006. [cit. 2021-09-10]. Dostupné na internete:

<https://docplayer.cz/38709563-Prostorova-predstavivost-a-prostredky-k-jejimurozvoji.html>.su

[4] Vavrinčíková, B.: *Rozvíjanie priestorovej predstavivosti pomocou modelovania telies* [online]. Prešov Metodicko-pedagogické centrum, 2014. [cit. 2021-09-10]. Dostupné na internete:

<https://mpc-edu.sk/sites/default/files/projekty/vystup/9_ops_vavrincikova_beata_-_rozvijanie_priestorovej_predstavivosti_pomocou_modelovania_telies.pdf>.

Mgr. Emília Miťková, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: mitkova@fmph.uniba.sk

HRAJEME SI V MATEMATICE

JARMILA NOVOTNÁ

ABSTRAKT. V pracovní dílně se stejným názvem byla pozornost věnována jednomu z mnoha typů didaktických her pro vyučování matematice, jmenovitě her, které vyžadují použití různých typů kostek. Účastníci měli možnost se seznámit se základními variantami několika her a navrhnout různé modifikace cíleně upravené pro žáky, které učí. V článku jsou některé z her představeny a okomentovány.

Úvod

Hravost je přirozeným projevem dětí, a to nejen v předškolním věku. Potřeba hry přetrvává v nejrůznějších formách až do dospělosti. Hra vede k rozvíjení tvořivých způsobů myšlení, ke zdravé soutěživosti. To však nejsou jediné pozitivní aspekty her. Hru lze využít např. při sledování vývoje osobnosti pro utváření sebepojetí jako jádra osobnosti, při usměrňování a diferenciaci emocí, při uvolňování či vhodném vyrovnávání napětí. Hra může sloužit k navazování kontaktů, k modelování reálných situací, k přejímání sociálních norem při podřizování se obecným pravidlům hry. Při hře roste sebedůvěra, sebevědomí, důvěra ve spoluhráče.

Termín hra je používán v různých významech. V [4] jsou některé z nich představeny podrobněji. Vedle spontánních her přechází dítě ve školním věku k cíleně zaměřené hře rozvíjející jeho smysly, paměť, představivost atd. Hru nazveme didaktickou hrou, jestliže má výchovně vzdělávací cíl [4].

Použití didaktických her ve vyučování je jednou z mnoha užitečných a oblíbených vyučovacích technik. Zařazení her do vyučování matematice odbourává nežádoucí atomizaci získaných vědomostí a přispívá k jejich propojení a utváření potřebných souvislostí. Hry pomáhají žákovi budovat vlastní nezávislost a učit se organizovat poznatky (to plyne z interaktivní a kooperativní podstaty činností typu hra), objevovat nové vztahy, upevňovat znalosti a dovednosti, procvičovat nedostatečně zvládnuté dovednosti a terminologii. Viz např. [3]

Zaměření pracovní dílny

Pracovní dílna byla věnována použití didaktických her ve vyučování matematice. Byly prezentovány hry pro dva a více hráčů, při nichž jsou potřeba hrací kostky. Základní varianty her byly převzaty z knih [1] a [5]. Hry jsou konstruovány tak, aby podpořily vytvoření prostředí, které provokuje chuť žáků přemýšlet, hledat souvislosti, učit se něco nového, hledat vítěznou strategii, spolupracovat apod. Současně podporují u žáků používání korektního matematického jazyka.

Ve všech použitých hrách je zařazena manipulace s kostkami. Jednou ze zásad pro použití didaktických her ve vyučování uvedených v [2] je, že do činnosti má být zapojen, pokud možno, celý kolektiv a hra má dávat každému hráči možnost někdy vyhrát. Házení kostkami vnáší do hry prvek náhody, který tuto zásadu výrazně podporuje.

Při hrách převzatých z [1] se používají hrací kostky ve tvaru různých pravidelných a polopravidelných mnohostěnů. V současné době jsou již tyto hrací kostky běžně dostupné na českém hračkářském trhu. Jediným problémem může být, že stěny kostek nemusí být vždy pokryty číslicemi nebo matematickými znaky, které jsou pro danou hru potřeba. Tuto nesnáz můžeme snadno odstranit polepením stěn mnohostěnu potřebnými texty na samolepicích nálepkách. Případů, kdy je to potřeba, však není mnoho.

V dalším textu uvádíme ukázky her použitých v pracovní dílně, v jejich základní podobě uvedené ve zdroji. Účastníci dílny měli nejen možnost vyzkoušet si jednotlivé hry, ale mohli také navrhovat modifikace, které považovali za obohacení použití příslušné hry.

Ukázky her použitých v pracovní dílně

Hra pro dva hráče, převzatá z [5]

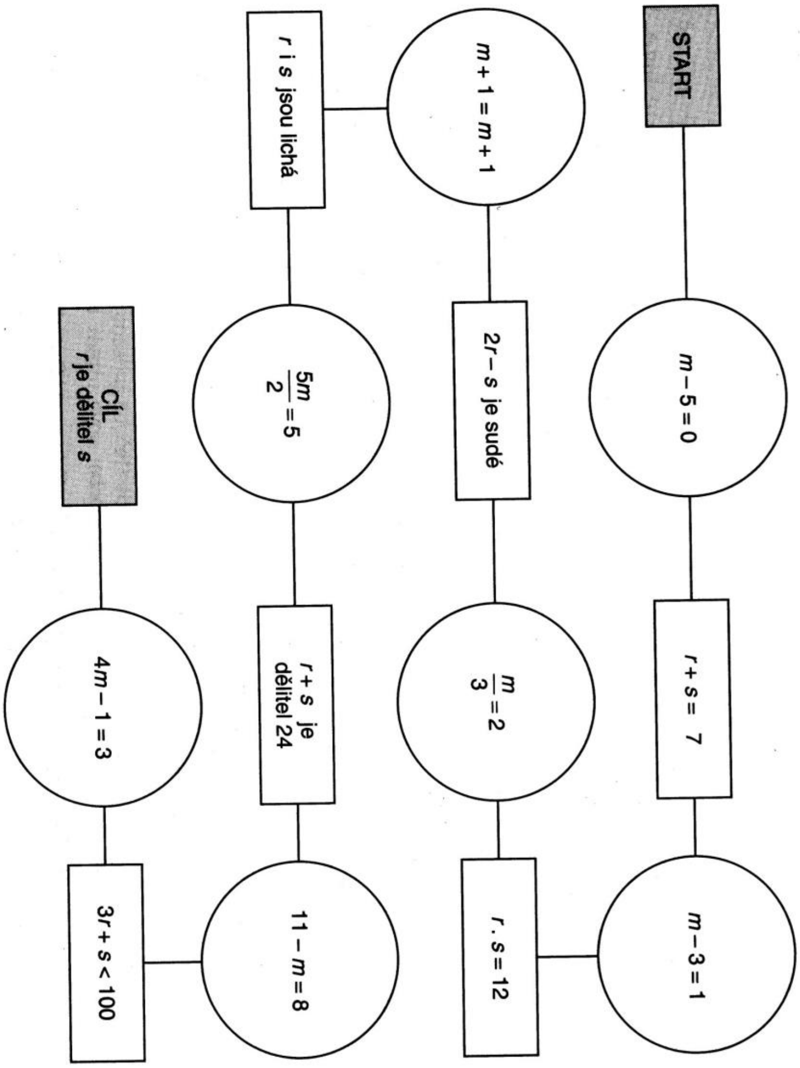
Hra je modifikací deskových her, se kterými si je většina žáků zvyklá hrát mimo vyučování. Je v ní obsažen silný prvek náhody, vyhrát nemusí jen nejlepší matematik, ale kdokoli z hráčů, kterému padají vhodná čísla na kostkách a zvládne vyřešit jednotlivé úkoly. Na druhé straně však žák s dobrými matematickými znalostmi může objevit víc řešení, než je to nejběžnější, a tím získat výhodu proti těm žákům, kteří se omezují jen na znalost několika algoritmů. Podle toho, jaký vytvoříte hrací plán, může být hra procvičovací, opakovací, objevovací atd.

Potřebujete: 2 hrací kostky
2 figurky různých barev
1 hrací plán (příklad viz obr. 1)

Pravidla: ***Cílem každého hráče je dostat svou figurku co nejrychleji z místa START do místa CÍL. Vyhrává ten, kterému se to podaří jako prvnímu.***

1. *Zahájení:* Každý hráč hodí oběma kostkami. Začíná ten hráč, jemuž padl větší součet čísel na obou kostkách. V případě rovnosti součtů hází oba hráči znovu.
2. *Průběh hry:* Při výměně hráče hází hráč oběma kostkami a postupuje takto:
   2a. Jestliže je hráč v obdélníkovém políčku, nahradí písmeno *m* v nejbližším kruhu jedním z obou čísel, která mu padla (hráč rozhoduje, které z čísel použije). Jestliže podmínka v kruhu platí, hráč postupuje na další políčko a hází znovu; jestliže neplatí, hraje druhý hráč.

   2b. Jestliže je hráč v kruhovém políčku, nahradí písmena *r*, *s* v nejbližším obdélníku čísly, která mu padla (hráč rozhoduje, které z čísel bude *r* a které *s*). Jestliže podmínka v kruhu platí, hráč postupuje na další políčko a hází znovu; jestliže neplatí, hraje druhý hráč.



Obrázek 1: Příklad hracího plánu pro Hru pro dva hráče

Hry převzaté z [1]

„Hráčem“ v následujících hrách může být jednotlivec, dvojice, případně i skupinka žáků. Pokud je jeden hráč tvořen skupinou, je podpořena komunikace mezi žáky ve skupině.

Poznámky: Ve většině těchto her je hracím plánem záznamový arch, do kterého si každý hráč zapisuje svou volbu, nápad, výsledek apod. Všichni hráči přitom hrají se stejnými vstupními hodnotami. Výjimkou je hra Otáčející se součiny.

Hrací plány je možno upravit, počítat s menšími čísly, předepsat menší počet kroků apod.

- *Umísti své hodnoty*

  2-3 hráči, každý hráč tvořen 2 žáky

  Potřebujete: 1 desetistěn očíslovaný 0 až 9
  1 hrací plán pro každého hráče (obr. 2)

Cíl	Číslo	Rozdíl
Nejblíž k 100	□□	
Nejblíž k 500	□□□	
Nejblíž k 1 000	□□□□	
Nejblíž k 5 000	□□□□	
Nejblíž k 10 000	□□□□□	
Nejblíž k 100 000	□□□□□□	
	Celkem	

Obrázek 2: Hrací plán pro Umísti své hodnoty

Pravidla: ***Vyhrává hráč, který má nejmenší celkový součet***

1. Hoďte desetistěn. Všichni hráči použijí hozené číslo.
2. Zapište číslo do jednoho z okének na svém hracím plánu.
3. Jakmile jednou zapíšete číslo do okénka, nesmíte s ním hýbat.
4. Střídejte se v házení desetistěnu tak dlouho, až zaplníte všechna okénka.
5. Vypočítejte a zaznamenejte rozdíl mezi každým z cílových čísel a vaším číslem.
6. Sečtěte všechny rozdíly. To je vaše skóre ve hře.

Hrajte hru aspoň dvakrát.

Poznámka. Obvykle se započítává absolutní hodnota rozdílu cílového a vytvořeného čísla. Jestliže žáci umí počítat se zápornými čísly, lze absolutní hodnotu nahradit rozdílem s příslušným znaménkem; za menšence se např. volí cílové číslo, za menšitele vytvořené číslo.

■ *Vyškrtni číslo*

2 hráči

Potřebujete: 1 osmistěn očíslovaný 1 až 8
1 krychli očíslovanou 1 až 6
1 hrací plán pro každého hráče (obr. 3)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Obrázek 3: Hrací plán pro Jednu partii Vyškrtni číslo

Pravidla: ***Vyhrává hráč, který dosáhne největší skóre.***

1. Hoďte osmistěn a krychli. Vypočítejte součet. Oba hráči použijí tento součet.
2. Vyškrtněte tento součet nebo kterákoli jiná čísla na vašem hracím plánu, které po sečtení dají součet z bodu 1. .
3. V házení se střídejte, dokud můžete vyškrtnout nějaké číslo. Váš soupeř pokračuje tak dlouho, dokud on může vyškrtávat.
4. Sečtěte všechna vaše vyškrtnutá čísla. To je vaše skóre ve hře.

Hrajte hru aspoň třikrát.

- *Síla umístění*

2-3 hráči, každý hráč tvořen 2 žáky

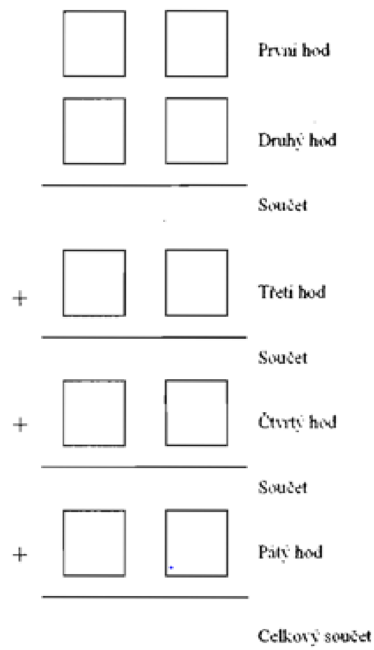
Potřebujete: 1 osmistěn očíslovaný 1 až 8

1 hrací plán pro každé družstvo (obr. 4)

Pravidla: ***Vyhrává družstvo, které dosáhne největší skóre.***

1. Rozhodněte, kdo začne. Střídejte se.
2. Hoďte osmistěn. Při prvním házení zapište hozené číslo do jednoho ze čtverců pro Hru 1.
3. Při druhém házení zapište hozené číslo do jednoho ze čtverců pro Hru 2.
4. Do prázdných čtverců napište 0.
5. Obě čísla sečtěte.
6. Opakujte kroky 2-4 ještě pro další tři házení.

Hrajte hru aspoň dvakrát.



Obrázek 4: Hrací plán pro Síla umístění

- *Otáčející se součiny*

2 hráči, každý hráč tvořen 2 žáky

Potřebujete: 2 dvanáctistěny očíslované 1 až 12

2 sady žetonů, každá jiné barvy, přibližně 20 pro družstvo

1 (společný) hrací plán (obr. 5)

V této hře hrají obě družstva na společném plánu a každé družstvo si generuje svá čísla podle pravidel.

Pravidla: ***Vyhrává to družstvo, kterému se podaří mít čtyři žetony v jedné řádce, sloupci nebo úhlopříčce.***

1. Domluvte se, kdo začne. V házení se střídejte.
2. Hoďte oběma dvanáctistěny, vynásobte příslušná čísla a umístěte svůj žeton na součin.
3. Vaši soupeři vyberou jeden dvanáctistěn, tím hodí a druhý nechají ležet. Tím získají nové číslo, vynásobí čísla a položí svůj žeton na součin.
4. Je-li jednou na čísle žeton, nelze tam umístit druhý.
5. Pět hvězdiček na hracím plánu jsou divoké čtverce a nelze je pokrýt. Mohou být použity kterýmkoli družstvem k získání čtyř žetonů v řadě.

Hrajte hru aspoň třikrát.

1	★	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	14	15	★
16	18	20	21	22	24	25	27
28	30	32	33	35	36	40	42
44	45	48	★	49	50	54	55
56	60	63	64	66	70	72	77
80	81	84	88	90	96	99	★
100	★	108	110	120	121	132	144

Dvanáctistěn 1 Dvanáctistěn 2

Obrázek 5: Hrací plán pro Otáčející se součiny

Modifikace: První hození dvou dvanáctistěnů proběhne stejně. Oba dvanáctistěny jsou položeny bez otáčení na označená místa na hracím plánu (viz obr. 5). V dalších krocích však hráč, který jsou na řadě, nehází jedním dvanáctistěnem, ale natáčejí dvanáctistěn, na němž chce měnit číslo, stěnou s tímto číslem nahoru. Zatímco v základní variantě ovlivňuje výsledek hodně náhoda a procvičuje se hlavně numerické počítání, v této modifikaci je hlavním matematickým pozadím rozklad čísla na součin dvou činitelů; náhoda zde hraje okrajovou roli.

Diskuse ve třídě

Po skončení hry můžeme zařadit diskusi zahrnující strategie řešení, které jednotliví žáci/jednotlivá družstva použili. Každá otázka učitele nebo ostatních hráčů by měla obsahovat nejen otázku *Jak?*, ale i *Proč?*, případně *Co kdyby?*.

Pro Hru pro dva hráče je možné volit různé modifikace hracího plánu, což nabízí pestré využití v různých oblastech školní matematiky. Lze ji použít jak při odhalování vlastností matematických objektů, tak i jako hru procvičovací. Při diskusi se lze zaměřit např. na objevené vlastnosti a jejich možné využití při hře.

Pro hru Umísti své hodnoty je pro diskusi vhodné např. otázky jako „Který z čtverečků jsi vyplnil nejdřív? Proč?“. Pro hru Vyškrtni jsou to otázky jako např. „Urči nejmenší možný výsledek“, „Vytvoř dvě různé posloupnosti hodů, při nichž by bylo možno vyškrtnout všech 14 čísel“ nebo „Najdi nejmenší počet výměn potřebných k vyškrtnutí všech 14 čísel“. Podobně lze postupovat i u dalších her.

Závěrečné poznámky

Hráči by měli mít možnost zahrát si stejnou hru víckrát. Tak budou schopni snáze rozvíjet vlastní herní strategie. Řešení uvedených a jim podobných úloh zahrnuje kromě strategického uvažování také uvažování matematické. Využití matematických znalostí v mnoha případech zjednoduší hráčům nalezení vhodné, případně dokonce vítězné, herní strategie.

Příprava na použití obdobných her ve vyučování vyžaduje, aby se vyučující předem s hrou podrobně seznámil, sám si ji několikrát zahrál. Bez toho je velmi obtížné efektivní využití hry s předem stanovenými cíly, ale i sledování diskusí žáků zaměřené na matematické pozadí her apod. Zkušenosti z použití představených a podobných her ukazují, že výsledky jsou obvykle vynikající.

Poděkování

Výzkum byl podpořen projektem H2020 Enhancement of research excellence in mathematics teacher knowledge, acronym MaTeK, no. 951822.

LITERATURA

[1] Janes, N.S. *Problem Solving with Polyhedra Dice*. New York, Cuisenaire Company of America, Inc,, 1994. New York. ISBN 9780938587743.

[2] Krejčová, E., Volfová, M. *Didaktické hry v matematice*, Hradec Králové, Gaudeamus, 1994, ISBN 80-7041-960-1.

[3] Novotná, J.. Matematické hry a komunikace. In *Sborník příspěvků z konference Jak učit matematice žáky ve věku 11-15 let*, s. 97-102, Praha: JČMF, 2002, ISBN 80-7015-840-9

[4] Novotná, J. Hry a soutěže a jejich vliv na motivační a komunikační klima ve třídě. In: *25 kapitol z didaktiky matematiky*, s. 379-390, Praha, Univerzita Karlova – Pedagogická fakulta, 2004, ISBN 80-7290-189-3.

[5] Novotná, J., Kubínová, M., Sýkora, V. (1998). *Matematika s Betkou 3 pro 8. ročník základní školy,* Praha, Scientia, ISBN 80-7183-148-4..

prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.
Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta
Magdalény Rettigové 4
CZ – 116 39 Praha 1
e-mail: jarmila.novotna@pedf.cuni.cz

ZOZNÁMTE SA - WILMA

MÁRIA SLAVÍČKOVÁ

***ABSTRAKT.** V príspevku stručne predstavíme V príspevku stručne predstavíme WILMA-u, ktorá vzniká v rámci projektu KEGA 014UK-4/2020 „Podpora vzdelávania učiteľov matematiky na základných a stredných školách prostredníctvom zdieľania inovačných materiálov, foriem a metód vyučovania.“*

Zdroje, ktoré využívame vo vyučovaní

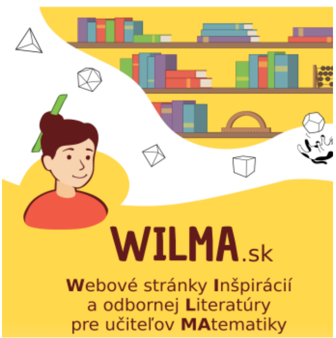
V súčasnosti je k dispozícii obrovské množstvo portálov, kde môže učiteľ nájsť inšpiráciu pre vyučovanie, oprášiť si staré vedomosti, naučiť sa niečo nové a pod. Zorientovať sa v nich, vyhodnotiť, ktorý materiály bude vhodný, dostatočne kvalitný, overený, je náročné.

Každoročne vzniká (nielen) na našom pracovisku niekoľko záverečných prác ktoré obsahujú inšpiratívne materiály pre učiteľov matematiky. Po drobných úpravách s cieľom vytiahnuť len tú časť, ktorá je vo vyučovaní aplikovateľná, by mohli byť učiteľskej verejnosti sprístupnené. Aj keď záverečné práce sú verejne dostupné cez centrálny register prác, myslíme si, že to nie je zrovna miesto, kde by učiteľ matematiky išiel hľadať námety.

Preto vznikla aj myšlienka vytvorenia online knižnice pre učiteľov matematiky, kde budú k dispozícii recenzované materiály nielen študentov učiteľstva matematiky. Okrem toho, že príspevky/námety budú recenzované, mali by byť aspoň pilotne otestované a samozrejmosťou je, že budú dodržiavať autorský zákon. Ďalšie podmienky kladené na novovznikajúci portál vo forme online knižnice boli prehľadnosť, jednoduchosť a pútavosť. Našou snahou je (a bude) ponúknuť pestré vyučovacie metódy a formy, ako aj rozlišovanie niekoľkých typov materiálov, čo sa obsahu týka od základných, cez rozširujúce po zaujímavosti.

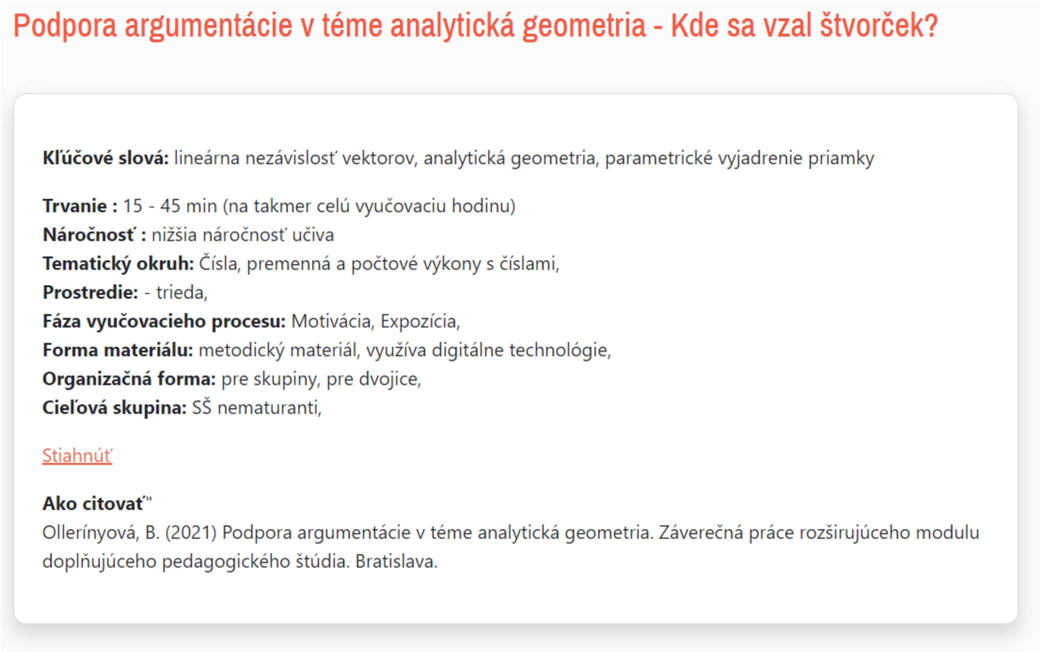
WILMA – kto, alebo čo?

WILMA je, ako ju opísala kolegyňa, knihovníčka s pravítkom vo vlasoch a mačkou, ktorá sa hrá s platónskymi telesami. WILMA je aj online knižnica overených materiálov pre vyučovanie matematiky na druhom stupni ZŠ alebo na SŠ, ktorá vznikla v rámci projektu KEGA 014UK-4/2020 „Podpora vzdelávania učiteľov matematiky na základných a stredných školách prostredníctvom zdieľania inovačných materiálov, foriem a metód vyučovania.“ Aktuálne si WILMA svoju knižnicu zariaďuje a plní novými materiálmi.



Obrázok 13: Vizuál nového portálu

WILMA umožňuje intuitívne nastavenie filtrov na vyhľadanie materiálov, alebo hľadanie podľa kľúčových slov.


Podpora argumentácie v téme analytická geometria - Kde sa vzal štvorček?

Kľúčové slová: lineárna nezávislosť vektorov, analytická geometria, parametrické vyjadrenie priamky

Trvanie : 15 - 45 min (na takmer celú vyučovaciu hodinu)
Náročnosť : nižšia náročnosť učiva
Tematický okruh: Čísla, premenná a počtové výkony s číslami,
Prostredie: - trieda,
Fáza vyučovacieho procesu: Motivácia, Expozícia,
Forma materiálu: metodický materiál, využíva digitálne technológie,
Organizačná forma: pre skupiny, pre dvojice,
Cieľová skupina: SŠ nematuranti,

Stiahnuť

Ako citovať"
Ollerínyová, B. (2021) Podpora argumentácie v téme analytická geometria. Záverečná práce rozširujúceho modulu doplňujúceho pedagogického štúdia. Bratislava.

Obrázok 14: Ukážka podrobností po kliknutí na vybraný materiál

Pred samotným stiahnutím dokumentu je možnosť zobraziť viac informácii o ňom (viď obr. 2), kde okrem základných údajov možno zistiť, aj ako daný materiál citovať.

Záver

Časom by sme chceli dopracovať aj spätnú väzbu od učiteľov, ktorí materiál skúsili, alebo si ho minimálne prečítali a skúsiť ho plánujú. Sme si vedomí, že práce na WILMA-e máme ešte veľa, ale veríme, že sa stane miestom, kam učitelia matematiky zavítajú pre nájdenie inšpirácie a že sa časom osmelia a pošlú nám vlastné overené techniky, metodiky, krátke videá, prezentácie a pod. Tešíme sa aj na Vašu návštevu na wilma.sk, príďte sa s ňou zoznámiť. WILMA si svoju knižnicu pravidelne rozširuje a aktualizuje.

Poďakovanie:

Touto cestou by som chcela poďakovať všetkým tým členom riešiteľskému kolektívu projektu KEGA 014UK-4/2020, ktorí sa aktívne zapojili do tvorby portálu WILMA a zrecenzovanými materiálmi prispeli k jej úspešnému naštartovaniu. Špeciálne poďakovanie patrí Mgr. Emílii Miťkovej, PhD. a Mgr. Adamovi Jakubičkovi za kreatívny prístup k návrhu vizuálu online knižnice.

Príspevok vznikol za podpory projektu KEGA 014UK-4/2020.

doc. PaedDr. Mária Slavíčková, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: slavickova@fmph.uniba.sk

ZACIELENÉ NA ARGUMENTÁCIU

MÁRIA SLAVÍČKOVÁ

ABSTRAKT. *V pracovnej dielni sa pozrieme na úlohy z učebníc a vyskúšame si ich preformulovanie a ďalšiu prácu s nimi, ktorá by mohla podporiť argumentáciu v triede.*

Na úvod

Štátny vzdelávací program nám určuje nielen čo naučiť, ale aj aké zručnosti žiakov rozvíjať. Naprieč celým vzdelávacím programom by sa mala objavovať argumentácia. Nielen v čase, keď preberáme tému „Logika, dôvodenie, dôkazy“. Ako uvádza [1], žiaci by mali argumentovať, komunikovať a spolupracovať v skupine pri riešení problému. Otázkou na zamyslenie na tomto mieste je, ako nám v tom pomáhajú dostupné učebnice, internetové zdroje, kolegovia, digitálne technológie.

V príspevku zameriame pozornosť na vybrané spôsoby argumentovania žiakov na druhom stupni ZŠ.

Čo o argumentácii hovoria výskumy

Argumentácia je návyk mysle, ktorý by sa mal neustále vytvárať v priebehu celej školskej matematiky [2]. O argumente hovoríme, ak vychádzajúc z dát (údajov) využívajúc legitímne kroky prichádzame k záveru, resp. tvrdeniu (voľný preklad definície podľa Toulmina [3]). Toulmin dodáva, že naše úvahy by mali byť podložené. To, že uvedieme na základe čoho si môžeme tvrdiť to či ono je jeden z najdôležitejších aspektov argumentovania v triede, keďže robí argumentovanie viditeľným a overiteľným.

Freeman [4] rozlišuje štyri módy argumentácie:

- *A priori*, keď žiak argumentuje spoliehajúc sa na svoju intuíciu
- *Empirická*, keď žiak argumentuje na základe svojej skúsenosti
- *Inštitucionálna*, keď žiak pri argumentovaní využíva definície a už osvojené pravidlá
- *Hodnotiaca*, žiak je schopný skonštruovať dôkaz tvrdenia zreťazením argumentov

Stylianides [5] identifikuje tri základné zložky dobrého argumentu:

- Je založený na myšlienkach alebo akceptovaných pravdách porozumených v triede (resp. komunite, pre nás však je komunitou trieda, v ktorej vyučujeme)
- Má formu odôvodnenia, ktoré je akceptované komunitou
- Je komunikovaný využitím primeraného jazyka pre danú vekovú skupinu (argument piataka by sa mal jazykovo líšiť od argumentu ôsmaka)

Keď sa pozrieme na vybrané kategorizácie, majú prekryv a so všetkými typmi sme sa vo svojej pedagogickej praxi stretli. My by sme však odkaz na autoritu radi eliminovali a skôr videli pokročilejšie argumentovanie u svojich žiakov.

Pri argumentovaní možno voliť rôznu formu:

- *Obrázok*, žiak načrtne obrázok pre konkrétne hodnoty, alebo využije všeobecný, resp. zovšeobecnený obrázok
- *Algebraické vyjadrenie*, žiak využije algebraické výrazy či už pre konkrétne hodnoty, alebo zovšeobecnené vzťahy
- *Využitie analógie*, žiak bude argumentovať príbuznosťou s iným problémom, ktorý už riešil

Argumentácia má viacero funkcií, ktoré vo svojich výskumoch identifikovali napr. [6,7]. Pre účely tohto článku zhrnieme a vyberieme tie, s ktorými budeme ďalej pracovať (zoznam je pôvodne dlhší).

- *Overenie*, teda argument ktorý preukazuje platnosť tvrdenia
- *Vysvetlenie*, ide o proces konštrukcie argumentu tak, aby nám pomohol lepšie (resp. hlbšie) porozumieť danému konceptu, ukážka, prečo je tvrdenia pravdivé
- *Komunikácia*, argument môže byť použitý na komunikáciu myšlienok a predstáv, tým sa stáva súčasťou vedomostí triedy, na ktorých možno ďalej budovať teórie
- *Podpora intuície*,

Nemali by sme zabúdať na žiadnu zo spomenutých úloh argumentu a systematicky na nich pracovať.

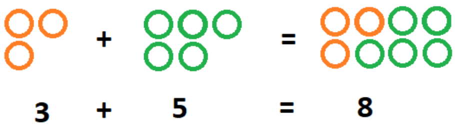
Využitie teórie v praxi

Ukážeme si niekoľko úloh z rôznych zdrojov, ktoré podporia ako komunikáciu, tak aj osvetlia niektoré ďalšie funkcie argumentu.

Ukážka 1

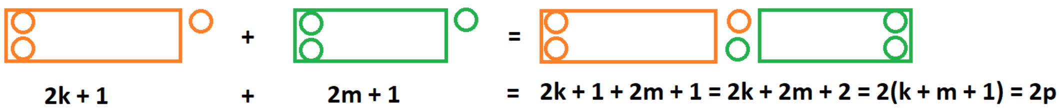
Zadanie úlohy: Zistite, či súčet dvoch nepárnych čísel je vždy párne číslo.

Stratégia 1: empirická. Žiak overí na niekoľkých konkrétnych hodnotách, napr. 3+7=10, 11+5=16, 23+13=3, a vyhlási tvrdenie za platné



Obrázok 15: práca s konkrétnymi hodnotami

Stratégia 2: inštitucionálna. Žiak pracuje s abstraktným modelom na vyargumentovanie platnosti tvrdenia.



Obrázok 16: práca so všeobecnými hodnotami

Ako vidíme z obrázkov, stratégie sa môžu ešte členiť na grafické a algebraické. Spojením stratégií 1 a 2 (či už v jednej alebo druhej forme) získavame induktívne odvodenie, keďže žiak od konkrétnych prípadov zovšeobecňuje a overuje platnosť tvrdenia pre všetky celé čísla.

Ukážka 2

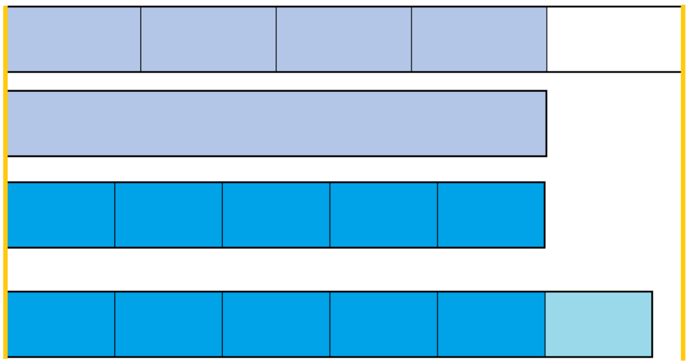
Zadanie úlohy: Ak sa cena tovaru zníži o 20 % a potom sa opäť zvýši o 20 %, v podstate sa nezmenila a budeme platiť rovnako.

Stratégia 1: empirická, nesprávna úvaha. Táto stratégia vychádza z nesprávneho chápania percenta. Žiak môže uvažovať nasledovne: Tovar stojí 100 % ceny, odpočítať a pripočítať 20 % znamená, že sa cena nezmení, 100 % - 20 % + 20 % = 100 %

Stratégia 2: empirická, algebraická. Žiak vyskúša pre niekoľko hodnôt, napr. ak tovar stál 100 € a bol zlacnený o 20 %, bude stáť 80 €. Ak ho teraz zdražíme o 20 %, bude stáť 96 €. Záverom môže byť, že zlacnenie a zdraženie tovaru nás nedostane na pôvodnú sumu, zaplatíme menej.

Stratégia 3: inštitucionálna. Ide o zovšeobecnenie stratégie 2, keď žiak nepracuje s konkrétnymi hodnotami, ale so všeobecnými. Potom úvaha môže vyzerať nasledovne: Ak cena tovaru je C, potom pre novú cenu, ozn. NC, bude platiť: $NC = C \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}2 = 0{,}96\,C$, teda nedostaneme sa na pôvodnú cenu, ale o 4% nižšiu cenu.

Stratégia 4 a 5: empirická, grafická a inštitucionálna grafická. Táto stratégia je vo svojej podstate identická so Stratégiou 2 (resp. 3). Ide o grafickú reprezentáciu zápisu s konkrétnymi hodnotami, resp. všeobecným vyjadrením. Ponúkame grafické zobrazenie pre hodnotu vo všeobecnosti (obr. 3)



Obrázok 17: Grafické riešenie a argument úlohy s percentami

Ako vidno aj z obrázku 3, pridanie 20 % k zľavnenému tovaru delí novú cenu na „menšie dieliky“, takže novovzniknutá cena nedosiahne pôvodnú.

K čomu nás to vedie

Ako vidno z ukážok, spôsobom argumentovania je niekoľko a bolo by dobré dať žiakom úlohy, ktoré podporujú rozmanitosť riešení, aby to neskĺzlo do memorovania sa postupov a schém, podľa ktorých by sa dalo fungovať. Nestačí nám len „odvolanie sa na autoritu“, chceli by sme bohaté, kontextovo pestré aktivity, obsahujúce skúmanie, s nutnosťou formulovania hypotéz, alebo by mali aspoň viesť ku zovšeobecneniu. V neposlednom rade by sme mali byť schopní odsledovať korektnosť úvah a vedieť (bez prezradenia výsledku) pomôcť pri oprave uvažovania.

Záver

Argumentácia je spôsob myslenia o matematike, nie zručnosť, alebo súbor činností, ktoré sa treba namemorovať [8]. Tomu by sme mali prispôsobiť spôsob, akým argumentáciu podporujeme. Je dôležité sa na hodinách pýtať „Prečo?“ pri riešené úloh ako aj v rámci diskusie v triede. Je však na dohode medzi žiakmi a učiteľom, pokiaľ treba argumentovať (kedy sa túto otázku prestať pýtať, lebo sme už na pôde, kde je to každému jasné). Podporenie zdieľania nápadov s celou triedou, formulovanie nových otázok, problémov, uvažovanie od konca a pod. sú dôležitou súčasťou procesu. Tak ako aj narábanie s chybou a vyargumentovanie (najlepšie spolužiakmi), prečo poskytnuté riešenie nie je správne.

Poďakovanie:

Príspevok vznikol za podpory projektu H2020 číslo 951822, Enhancement of research excellence in mathematics teacher knowledge, acronym MaTeK (projectmatek.eu).

LITERATÚRA

[1] Štátny pedagogický ústav: *Inovovaný štátny vzdelávací program*. ŠPÚ, 2016

[2] Cuoco, A. P., Goldenberg,P., a Mark, J.: Organizing a Curriculum Around Mathematical Habbits of Mind. In. C. Hirsh, B. Beyes, and G. Lappan (Eds.) *Curriculum Issues and an Era of Common Core State Standards for Mathematics*, 2012, VA: NCTM

[3] Toulmin, S. E. The Uses of Argument. Rev. ed. New Yourk: Cambridge University Press. 1958/2003

[4] Freeman, J. B. Systematizing Toulmin's warrants: an epistemic approach. *Argumentation* 19(3), 2005, 331-346

[5] Stylianides, A. *Proving in the Elementary School Classroom*. New Yourk: Oxford University Press, 2016

[6] Hanna, G. Some Pedagogical Aspects of Proof. *Interchange*, 21, 1990, s. 6-13

[7] Weber, K. Students' Difficulties with Proof. MAA Research Sampler, https://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/research-sampler-8-students-difficulties-with-proof

[8] Stylianou, D., a Blanton, M. *Teaching with Mathematics Argument*. Strategies for supporting everyday instruction. Heinemann Portsmouth, NH, 2018

doc. PaedDr. Mária Slavíčková, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: slavickova@fmph.uniba.sk

PEDAGOGICKÝ KLUB MATEMATICKEJ GRAMOTNOSTI POČAS PANDÉMIE

JÁN ŠUNDERLÍK

***ABSTRAKT.** Je dobré, keď učitelia spolupracujú. Niekedy ich k tomu donútia okolnosti, ale v našom prípade išlo o spoluprácu plánovanú. V príspevku predstavujeme základný model pedagogického klubu matematickej gramotnosti z praktického a teoretického pohľadu a ako naše zamýšľané plány ovplyvňuje pandémia.*

Vznik pedagogických klubov na škole

V školskom roku 2018/2019 bola vypísaná výzva pre gymnáziá so zameraním na „Zvýšenie kvality vzdelávania na gymnáziách - čitateľská, matematická, finančná a prírodovedná gramotnosť". Súčasťou tejto výzvy bola aj tvorba takzvaných „Pedagogických klubov". Hlavným účelom vzniku týchto klubov bolo „poskytnúť platformu pre aktívne sieťovanie a spoločnú spoluprácu pedagogických zamestnancov na spoločných témach a pre medzigeneračnú výmenu medzi mladými a staršími/skúsenejšími pedagogickými zamestnancami" (1). Pedagógovia sa majú stretávať a vymieňať si skúsenosti, byť ochotní sa vzdelávať a získavať nové poznatky. Za túto činnosť im z projektu prináleží určitá finančná odmena za každú hodinu absolvovaného pedagogického klubu. Doba trvania klubu mohla byť rôzna - minimálne 15 hodín, maximálne 30 hodín za polrok po dobu 3 rokov. To predstavuje minimálne 90 a maximálne 180 hodín za celé obdobie riešenia projektu.

Ako však skonkrétniť tieto ciele do každodennej školskej praxe? A ako vytvoriť vhodné prostredie na spomínanú výmenu skúseností učiteľov matematiky? Bolo by zaujímavé vidieť porovnávaciu štúdiu zhostenia sa tejto témy jednotlivými žiadateľmi. V tomto príspevku chceme predstaviť niektoré teoretické východiská pri navrhovaní dizajnu pedagogického klubu pre oblasť matematickej gramotnosti. Našou základnou otázkou je, ako viesť vzdelávanie pedagógov, ktoré by vychádzalo z konkrétnej školskej praxe a aj smerovalo k nej?

Nad týmto sa zrejme zamýšľali všetci podávatelia projektu a ťažko tu hľadať nejaké univerzálne riešenia, nakoľko podmienky a aj potreby jednotlivých škôl sa môžu líšiť. Taktiež sa dá predpokladať, že na školách funguje určitá spolupráca pedagógov. Otázkou však je na akej úrovni a v akej forme. Ďalej sa dá predpokladať, že na školách existuje viacero aktivít zameraných na podporu vyučovania matematiky, rozvíjanie matematickej gramotnosti a popularizácie matematiky, ktoré mohli tvoriť základ jednotlivých aktivít projektu ako aj činnosti klubov.

Model pedagogického klubu

Zváženie aktuálneho stavu je jedným z predpokladov pre nastavenie ďalšej „plánovanej" spolupráce. Okrem poznania východiskového stavu na škole, je nemenej dôležité definovať si zamýšľaný cieľ a charakter vzdelávania. Nakoľko sa jedná o pedagogický klub, je vhodné, aby stretnutia prebiehali v neformálnom pracovnom duchu, ktorý môže napomôcť spolupráci. Je potrebné vytvoriť skupinu, ktorá by nebola príliš formálna ale mala by potenciál riešiť aktuálne otázky pedagogickej praxe. Kľúčovú úlohu zohráva vzájomný rešpekt členov klubu a dôvera pri zdieľaní sa o svojej pedagogickej praxi.

V príspevku predstavujeme jedno z možných východísk pri návrhu klubu matematickej gramotnosti. Základnú štruktúru tvorí 1 stretnutie za mesiac v dĺžke 3 hodiny. Jednotlivé stretnutia sme si z praktického hľadiska rozdelili na menšie celky, takzvané moduly:

- administratívne moduly, ktoré sa budú cyklicky opakovať v priebehu školského roka, venované aktuálnym potrebám, organizácii v rámci predmetovej komisie,
- tematické moduly, zamerané na prehlbovanie vedomostí v rámci IKT, medzipredmetových vzťahov matematickej a finančnej gramotnosti,
- seriál modulov objavného vyučovania z projektu PRIMAS (2) ,
- moduly zamerané na prax, učitelia spoločne pripravujú vyučovaciu hodinu formou „lesson study",
- variabilné moduly, prispôsobené podľa okolností alebo aktuálnych potrieb.

Moduly sú v rámci stretnutí cyklicky rozdelené do šiestich školských polrokov tak, aby každé dva polroky predstavovali samostatný celok a obsahovali aj autoevalvačné prvky na konci každého polroka.

Model stretnutí bol navrhnutý tak, aby postupne umožnil členom klubu reflektovať na svoju pedagogickú prax, diskutovať a zdieľať príklady dobrej pedagogickej praxe, pracovať na metódach objavného vyučovania, rozvíjať svoje digitálne zručnosti v používaní IKT vo vyučovaní matematiky.

Pri plánovaní klubu sme predpokladali, že bude potrebné počas prvého roku viac pracovať na vytvorení a definovaní vzájomnej spolupráce a dôvery. Z toho dôvodu boli do programu klubov zaradené už vypracované moduly zamerané na objavné vyučovanie, ktoré nám poskytlo vhodné aktivity na spoločné zdieľanie. V rámci modulov objavného vyučovania sme riešili konkrétne matematické problémy, pracovali sme s riešeniami žiakov, venovali sa teoretickým poznatkom. Skúsenosti ukázali, že je vhodnejšie vychádzať z aktuálnych potrieb učiteľov, ako do detailu bazírovať na splnení všetkých naplánovaných aktivít. Uvedené bolo dôležité hlavne počas prvého roku riešenia, kedy sa formoval spôsob komunikácie a konfrontoval sa samotný obsah klubu s očakávaniami jednotlivých jeho členov. Zastávame názor, že uvedené skutočnosti pozitívne ovplyvnili priebeh jednotlivých stretnutí.

Ako pandémia zasiahla do fungovania pedagogických klubov

Výrazným zásahom do činnosti pedagogického klubu po formálnej a obsahovej stránke bol nástup pandémie COVID 19 v marci 2020. Prezenčné stretnutia počas zatvorenia škôl neboli možné, a tak sa musel aj samotný obsah stretnutí prispôsobovať. Hoci v programe stretnutí klubov bola zakomponovaná istá flexibilita, nová situácia znemožnila oficiálne fungovanie klubov na určitú dobu. Práve v tomto období väčšina pedagógov potrebovala akútnu pomoc ako realizovať online vyučovanie, nakoľko nikto z pedagógov nebol na takúto situáciu dostatočne pripravený. Na priblíženie situácie vyberáme z popisu stavu ako ho predstavili Bakker a Wagner (3):

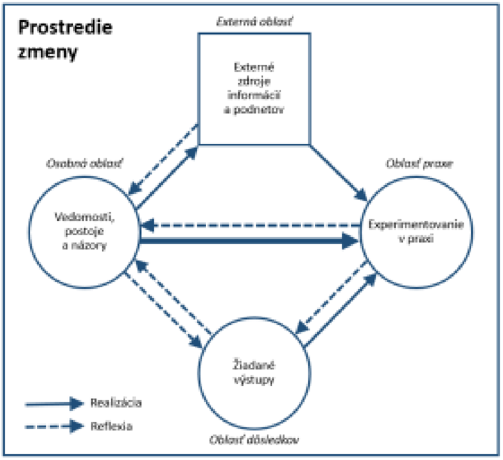
- potreba rýchlej adaptácie na online vyučovanie spôsobila prevahu transmisívnej pedagogicky,
- hodnotenie sa stáva problematické, strata kontaktu z tváre do tváre,
- nedostatok sociálnych kontaktov,
- nedostatok hotových online materiálov,
- nedostatok podpory pre učiteľov.

Daná situácia prekvapila aj skúsených učiteľov, ktorí museli improvizovať, nanovo nastavovať didaktický obsah a vytvárať vhodné prostredie pre vyučovanie a učenie sa matematiky. Síce v menších skupinkách, ale pedagógovia sa stretali aj mimo oficiálnych stretnutí pedagogického klubu v nadväznosti na prácu a atmosféru, ktorú nadobudli počas prezenčných stretnutí klubov. O jednotlivých problémoch sme diskutovali na kluboch a spoločne sme hľadali riešenia. Používanie IKT vo vyučovaní matematiky bolo bohato zastúpené v jednotlivých stretnutiach klubu, a preto dochádzalo len k miernej úprave plánovaného programu klubov.

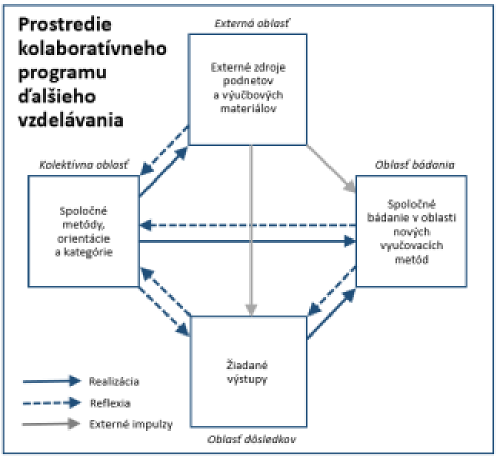
Počas online vzdelávania sme mohli pozorovať aj nasledovné:

- akútna potreba adaptovania sa na dištančné vzdelávanie akcelerovala proces používania IKT vo vyučovaní matematiky,
- sprístupnenie digitálneho obsahu,
- meniace sa postoje učiteľov, nielen k používaniu IKT technológií vo vyučovaní matematiky.

Tak ako sme zamýšľali pri návrhu programu matematických klubov, prvý rok bol dôležitý z pohľadu vzájomnej komunikácie. Postupne sme mohli badať meniaci sa spôsob práce členov klubu. Práve náročná situácia a spoločné problémy napomohli ku kolaboratívnemu spôsobu učenia sa. Aj keď uvedený spôsob práce nebol pre skupinu pedagógov charakteristický ale skôr situačný, vychádzajúci z aktuálnej potreby, dal jednotlivým pedagógom základ, na ktorom je možné stavať aj do budúcnosti. Tento posun by sme mohli vyjadriť dvomi modelmi práce učenia sa pedagógov, pred a počas pandémie. Posun rastu učiteľa by sme mohli charakterizovať od individuálneho vzdelávania (3) k vzdelávaniu kolaboratívnemu (4).



Obrázok 1: Model profesionálneho rastu učiteľa (3) in (5)



Obrázok 2: Model profesionálneho rastu učiteľa v kolaboratívnom programe ďalšieho vzdelávania (4) in (5)

Diskusia

Klub matematickej gramotnosti, v rámci projektu, je v poslednom roku riešenia. Tým, že štruktúra programu pozostáva z cyklicky sa opakujúcich modulov, je možné nadviazať na predošlé vedomosti v ďalšom roku, a tak prehĺbiť jednotlivé poznatky. Aktivita, ktorej sa chceme viac venovať v tomto školskom roku, je realizácia spoločných príprav odučenia a následnej reflexie konkrétnych hodín matematiky. Uvedený spôsob spolupráce učiteľov charakterizuje metóda *lesson study* (7).

Dôležitým prvkom v treťom roku fungovania pedagogického klubu je nadviazanie intenzívnejšej spolupráce s odborníkmi z univerzity, čo má viesť k prístupu k novým poznatkom a umocniť reflexiu na vlastnú pedagogickú prax. Uvedená spolupráca má napomôcť hlavne spoločnej, kolaboratívnej príprave pedagógov. V prvom polroku sa jedná o prípravu matematickej prechádzky na predmete *Objavná matematika*. V uvedenom modeli prípravy chceme podporovať kolaboratívne učenie sa. Takúto formu vzdelávania by sme chceli ďalej rozvíjať aj v spolupráci s odborníkmi z univerzity. V konečnom dôsledku je jedným z hlavných ukazovateľov práce v pedagogickom klube kvalitné matematické vzdelávanie našich žiakov. Zároveň je to aj základná motivácia pre ďalšiu spoluprácu pedagógov.

LITERATÚRA

[1] Príloha č. 7 výzvy OPLZ-PO1/2018/DOP/1.1.1-03 dostupné online (20.10. 2021) https://www.minedu.sk/09112018-vyzva-citatelska-matematicka-financna-a-prirodovedna-gramotnost-na-gymnaziu-oplz-po12018dop111-03-vyzva-uzavreta/

[2] Projekt PRIMAS, Objavné vyučovanie - Moduly ďalšieho vzdelávania učiteľov matematiky. Dostupné online (20.10. 2021) http://www.primas.ukf.sk/materials.html

[3] Bakker, A., Wagner, D. (2020) Pandemic: lessons for today and tomorrow?. Educational Studies in Mathematics 104(1), 1–4.

[4] Clarke, D. a Hollingsworth, H. (2002). Elaborating a model of teacher professional growth. Teaching and Teacher Education, 18(8), 947-967.

[5] Prediger, S. (2020). Content-Specific Theory Elements For Explaining and Enhancing Teachers’ Professional Growth in Collaborative Groups. Paper presented at the Teachers of Mathematics Working and Learning in Collaborative Groups, Lisbon, Portugal.

[6] MEDOVÁ, Janka: Profesionálny rast učiteľov a vzdelávateľov učiteľov v kontexte objavného vyučovania matematiky. [Habilitačná práca]. Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre. Fakulta prírodných vied. Nitra : FPV, 2020. 121 s.

[7] Šunderlík, J. (2008). Lesson study ako forma ďalšieho vzdelávania učiteľov na Slovensku. In Z. Rózová a. kol. (Ed.), Mladí vedci 2008 : vedecké práce doktorandov a mladých vedeckých pracovníkov (s. 69-674). Nitra: UKF.

PaedDr. Ján Šunderlík, PhD.
Spojená katolícka škola, Gymnázium sv. Cyrila a Metoda v Nitre
Farská 19., Nitra
SK – 94901
e-mail: jsunderlik@gmail.com

AKO NA PRIESTOROVÚ PREDSTAVIVOSŤ: NIELEN STAVBY Z KOCIEK

MARTINA TOTKOVIČOVÁ

ABSTRAKT. *V poslednej dobe sa čoraz častejšie stretávame na hodinách matematiky s deťmi, ktorým chýba cit pre priestorovú predstavivosť. Príčiny môžu byť rôzne. Naším cieľom nebude ich analyzovať. Skôr by sme sa radi zamerali na aktivity a gradáciu úloh, ktoré môžu deťom danú tému sprístupniť. Aby sme odbúrali stres z chyby, mnohé zadania sú autokorektívne, vďaka čomu si deti vedia riešenie skontrolovať poprípade opraviť bez asistencie dospelého.*

Stavby z kociek, gradácia zadaní

Väčšina geometrických predstáv sa začína formovať už v útlom veku a to priamou manipuláciou s geometrickými objektmi. Pri rozvíjaní priestorovej predstavivosti, okrem rôznych populárnych stavebníc majú svoje nezastupiteľné miesto aj obyčajné kocky. Môžu byť drevené v prírodnom prevedení, ale možno kvôli lepšej opísateľnosti, napríklad polohy konkrétnej kocky v stavbe, je výhodné pracovať s kockami, ktoré sú rôznofarebné. Keďže ide o pomôcku, ktorá má slúžiť vo vyučovacom procese detí aj mladšieho školského veku, mali by sme využívať kocky v základných, dobre odlíšiteľných farbách.

Pri stavaní z kociek a oboznamovaní sa so základnými typmi úloh, ktoré pomocou nich môžeme riešiť, by sme mali dodržiavať postupnosť gradujúcich zadaní. Častokrát sa stáva, že ak sa dieťa stretne z úlohou zameranou na stavby z kociek v 5. ročníku, učiteľ predpokladá, že má potrebné skúsenosti a zručnosti a aj keď tomu nie vždy je tak, jeho výuka to nezohľadňuje. Aj to môže byť jeden z dôvodov, prečo pre niektoré deti sú takéto úlohy v určitom momente neriešiteľné. Pri stavbách z kociek je potrebné, aby deti stavali, pozerali sa, pozorovali, objavovali. Ak má dôjsť k porozumeniu, je potrebné týmto krokom venovať dostatok času. Mali by sme dodržiavať nasledovnú postupnosť zadaní:

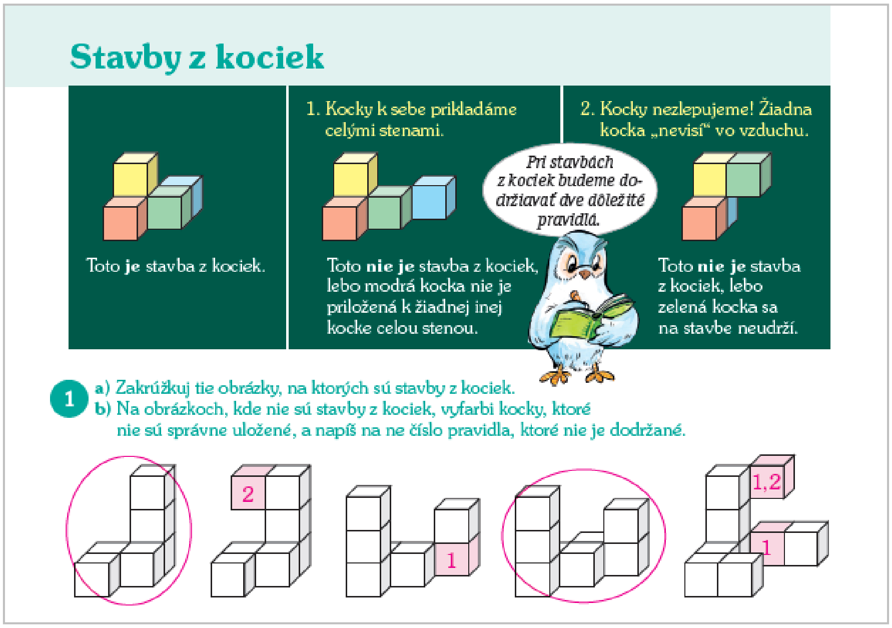
1. Postav stavbu podľa stavby.
2. Postav stavbu podľa obrázka (skutočná veľkosť/zmenšený).
3. Postupne meň stavbu.
4. Postav stavbu podľa plánu (používame dva základné typy).
5. Zapíš plán stavby.
6. Postav stavbu podľa pokynov (ústnych/písomných).
7. Nakresli, ako vidíš stavbu z jednotlivých strán.
8. Postav stavbu podľa pohľadov.
9. Zapíš postup stavby (pomocou dohodnutých značiek).

Čo rozumieme pod stavbou z kociek

Pri práci s kockami sa môžeme stretnúť s dvomi zaužívanými pojmami, jedným je stavba z kociek a druhým teleso z kociek. My sa budeme venovať stavbám z kociek. Stavba z kociek je daná dvomi jednoduchými pravidlami.

1. **Kocky k sebe prikladáme celými stenami.**
2. **Každá kocka musí byť položená na podložke na ktorej staviame, alebo na inej kocke.**

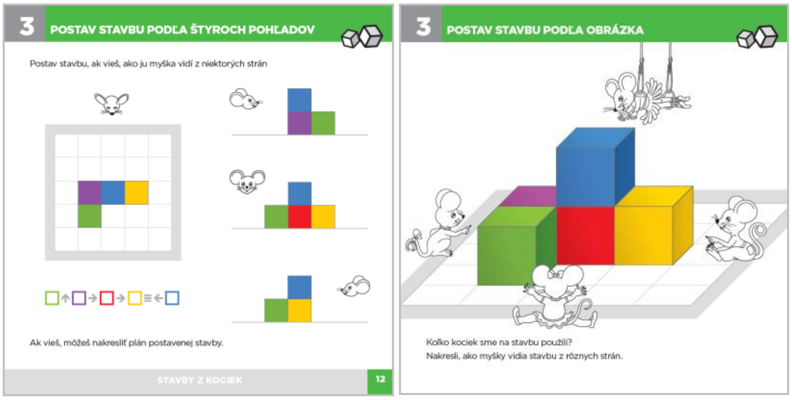
Je vhodné tieto pravidlá demonštrovať na správnych stavbách, ale aj na nesprávnych zoskupeniach kociek, ktoré nebudeme považovať za stavbu. Nezanedbajme krok následne preveriť porozumenie týmto pravidlám na konkrétnych príkladoch (Obrázok 1).



Obrázok 1

Autokorektívne prvky vo vyučovaní

Téma stavby z kociek patrí medzi tie, kde sa v jednom žiackom kolektíve môžu stretnúť deti s veľmi rôznymi vedomosťami. Preto môže byť pre učiteľa výbornou pomôckou materiál, ktorý obsahuje úlohy na rôznej úrovni náročnosti a zadania sú autokorektívne. Pri overení si správnosti svojho riešenia dieťa nemusí komunikovať s učiteľom, ale vie si svoje riešenie skontrolovať samé. Overenú formu, zodpovedajúcu popísaným požiadavkám majú voľné karty, takže učiteľ nepotrebuje pre každého žiaka rovnaké zadanie, ale môže v triede rozdať karty z jednej sady podľa náročnosti a preberanej témy a zohľadniť spomínané rôznorodé vedomosti žiakov. Výhodou takéhoto materiálu z pohľadu dieťaťa je, že môže naplno využiť potenciál inverznosti zadaní (Obrázok 2). Na jednej strane karty je napríklad zadanie, aby dieťa postavilo stavbu na základe pohľadov. Po splnení tejto úlohy kartu otočí a svoje riešenie si overí na druhej strane karty. Alebo môže postaviť stavbu podľa obrázka a do štvorcovej siete si zakresliť, ako túto stavbu vidí z rôznych pohľadov. Správnosť svojho riešenia si opäť môže overiť otočením karty.



Obrázok 2

Didaktické pomôcky zamerané na učivo – stavby z kociek

Didaktickou pomôckou využiteľnou na 2. stupni ZŠ, zohľadňujúcou predchádzajúce požiadavky, je sada kariet s názvom ***Nielen* STAVBY Z KOCIEK**. Nie sú to obyčajné karty. Ich prioritou je podporovať **HRAvé učeNIE**. Majú slúžiť aj ako inšpirácia. Určite každý učiteľ matematiky, ale aj deti samotné si budú vedieť na základe úloh v kartách vytvoriť nespočetne veľa svojich vlastných úloh. Tie rozvíjajú nielen ich tvorivosť, ale hlavne predstavivosť, priestorové videnie, jemnú motoriku, zmysel pre poriadok a detail... a mnoho iných kompetencií, ktoré hra s kockami rozvíja. Práve tento hrový prvok karty využívajú ako hlavný nástroj na získavanie nových vedomostí, osvojovanie si nových zručností. Zjednodušene povedané, na učenie sa. **Karty môže učiteľ využívať, ako samostatné zadania. S**ú rozdelené do ôsmich tematických celkov, ktoré sa veľmi dynamicky prelínajú a navzájom dopĺňajú (Obrázok 3). **Riešenie jednej úlohy môžeme nájsť ako zadanie inej úlohy.** Umožňuje nám to jazyk matematiky a vyjadrovacie prostriedky, ktoré využíva, a tie sú nesmierne pestré. Aj vďaka tomu je možné sa na úlohy pozerať ako na celok a ponúknuť jednu úlohu v rôznych kontextoch (Obrázok 5).

Obrázok 3

Prepojenie jednotlivých kariet

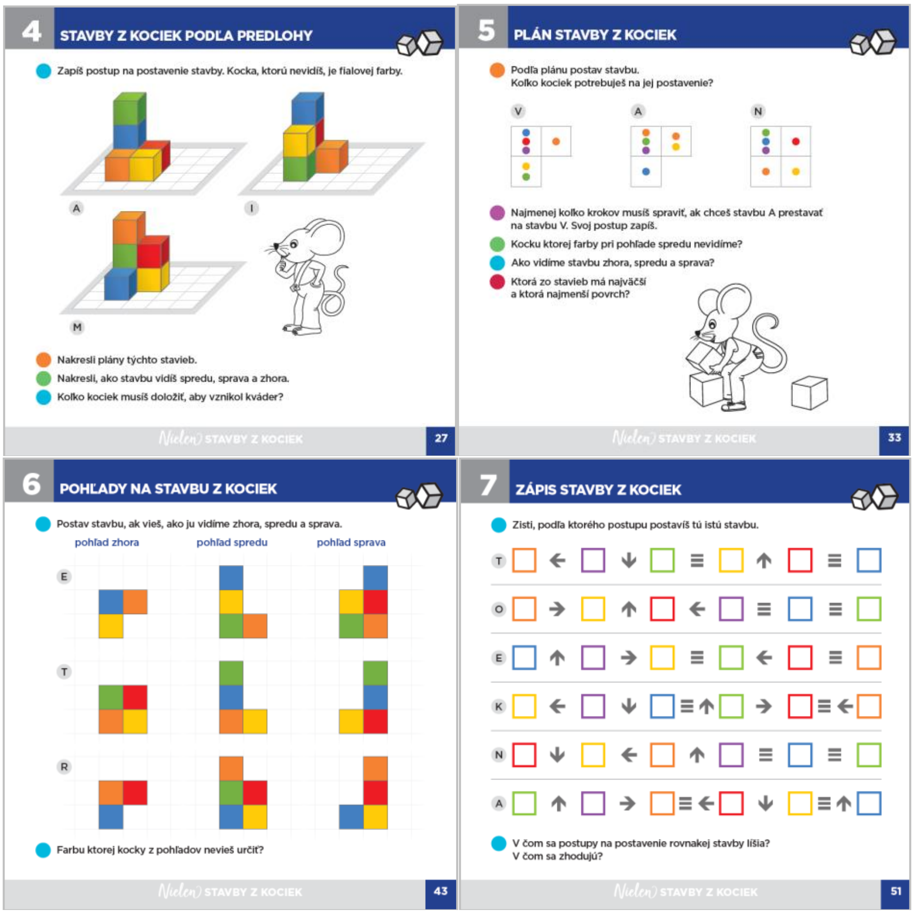
Pestrosť matematického jazyka je v kartách obsiahnutá ako dynamický prvok, ktorý niektoré karty navzájom prepája. Aj preto riešenie jednej úlohy môžeme nájsť v inej kapitole ako zadanie na prvý pohľad úplne odlišnej úlohy. Tieto prepojenia sa dejú medzi kapitolami 4, 5, 6 a 7. Jedným takýmto prepojením je koncept mesta Kockovo, ktoré sa objavuje na kartách 29, 49 a 52.

Deti milujú hádanky a šifry. Tie sú súčasťou navzájom prepojených kariet (no nielen tých). So spomínaným prepojením sa môžeme stretnúť v troch rôznych minisadách. O ktoré karty ide, zistíme na prvý pohľad podľa toho, že pri jednotlivých zadaniach sú použité rôzne veľké písmená z ktorých sa nám pravdepodobne nepodarí poskladať zmysluplné slovo. Je na učiteľovi či túto pridanú hodnotu pri práci s kartami využije. V prípade práce v triede by sme navrhovali skupinovú prácu napríklad v troch (štyroch) skupinách. Pre lepšiu zrozumiteľnosť uvádzame názornú ukážku (Obrázok 4, Obrázok 5).

Obrázok 4

Minisada (karty číslo 27 33 43 51, Obrázok 5)

Na týchto 4 kartách sú tie isté tri stavby, len inak zapísané. Ak usporiadame karty podľa kapitoly a vypíšeme písmená, ktoré označujú tú istú stavbu, v prípade prvej stavby na prvej karte dostaneme slovo ANTON (rovnako by sme dešifrovali aj slová IVETA a MAREK). takáto jednoduchá šifra slúži ako kontrola pre deti, bez toho, aby správnosť ich riešenia preveril učiteľ. Hlavné zadanie je doplnené aj o doplnkové zadania, ktoré umožňujú úlohu ďalej rozvíjať.



Obrázok 5

Stavby z kociek, i keď ich možno mnohí učitelia matematiky nepovažujú za rovnako dôležité učivo základnej školy akými sú napríklad zlomky či rovnice, sú nesmierne široká téma s množstvom veľmi rôznorodých zadaní na rôznych úrovniach náročnosti. Preto je veľmi pravdepodobné, že si v nich každé dieťa môže nájsť niečo, čo ho zaujme a kde má šancu zažiť úspech. A vieme, že úspech je najsilnejšou motiváciou nielen v procese učenia sa.

LITERATÚRA

[1] M. Totkovičová, K. Žilková: *Stavby z kociek*, Bratislava, ABCedu, a.s., 2020, ISBN 978-80-99973-01-6

[2] M. Totkovičová, K. Žilková: *Nielen stavby z kociek*, Bratislava, ABCedu, a.s., 2020, ISBN 978-80-99973-02-3

[3] M. Totkovičová, K. Žilková, V. Repáš: *Geometria pre tretí ročník ZŠ*, Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana, spol. s r. o., 2016, ISBN 978-80-8120-441-8

PaedDr. Martina Totkovičová, PhD.
Pedagogická fakulta, Univerzita komenského
Šoltésovej 4
SK – 811 08 Bratislava
e-mail: totkovicova1@uniba.sk

HROVÉ METÓDY VYUČOVANIA MATEMATIKY

VIERA UHERČÍKOVÁ, PETER VANKÚŠ

***ABSTRAKT.** V našom článku približujeme obsah pracovnej dielne, ktorá sa venovala hrovým metódam vyučovania matematiky. Konkrétne sme predstavili aktivitu „Zabudnutá hra“ a aktivity používajúce hlavolam „Tangram“. Uvedené aktivity sú primárne určené pre vyučovanie matematiky na druhom stupni ZŠ.*

Úvod

V modernom vyučovaní matematiky sa kladie dôraz na aktívnu činnosť žiakov na hodine. V tomto smere sa snažíme v našom príspevku pomôcť učiteľom predstavením dvoch námetov na takéto aktívne vyučovanie. Prvý námet, didaktická hra *Zabudnutá hra*, umožňuje rozvoj logického a kombinatorického myslenia žiakov druhého stupňa ZŠ. Jej dôsledná analýza vedie tiež k súčtu prvých *n* prirodzených čísel, čo je téma vhodná pre stredoškolskú matematiku. Druhý námet, aktivity spojené s hlavolamom *Tangram*, sú vítanou formou manipulatívnej činnosti vhodnej pre druhý stupeň ZŠ. Konkrétne sú použiteľné v témach súvisiacich s podobnými a zhodnými zobrazeniami resp. v učive venujúcemu sa obsahom a obvodom geometrických útvarov. Jedna z úloh je tiež venovaná Pytagorovej vete.

Didaktické hry

Pod didaktickou hrou rozumieme činnosť žiakov a učiteľa, ktorá sleduje isté didaktické ciele. Žiaci si spravidla tieto ciele neuvedomujú. Motiváciou ich činnosti je radosť z jej vykonávania, súťaživosť, možnosť práce pre prospech tímu, sebarealizácia a pod. Didaktická hra má pravidlá, ktoré organizujú činnosť žiakov. Táto činnosť, jej obsah a pravidlá didaktickej hry vedú k realizácii edukačných cieľov hry. Charakteristické pre didaktickú hru je vysoká angažovanosť a motivácia žiakov, potešenie z priebehu hravej aktivity (Vankúš, 2012). V rámci pracovnej dielne sme žiakom predstavili aktivitu, ktorá sa venuje didaktickej hre s názvom *Zabudnutá hra* (Petričková, 2021).

Ako prvé si uvedieme pravidlá tejto hry:

- Plán je v tvare obdĺžnika a má rozmery 3 riadky a 5 stĺpcov.
- Na začiatku umiestnime figúrku do prvého políčka (t. j. vľavo hore).
- Potom sa striedame v ťahoch, začína 1. hráč.
- 1. hráč, povedzme Jakub, môže v každom ťahu posunúť figúrku o nejaký počet políčok nadol (↓).
- 2. hráč, napríklad Marek, o nejaký počet políčok doprava (→).
- Hráči sa striedajú v ťahoch.
- Prehráva ten, kto už nebude môcť posunúť figúrku.

V rámci pracovnej dielne sme po predstavení pravidiel túto hru analyzovali z hľadiska výhernej stratégie. Po dokončení tejto analýzy sme následne modifikovali pravidlá hry, ktoré sme doplnili o tento bod:

- Nové pravidlo: Na začiatku každej hry uložte figúrku na iné miesto hracieho plánu.

Účastníci pracovnej dielne analyzovali novú situáciu, opäť z hľadiska výherných stratégií hráčov. Po tejto analýze sme sa dostali k všeobecnejšej otázke: Koľko hier by pri optimálnej stratégii vyhral prvý hráč a koľko druhý hráč, pri rozmere hracieho poľa *n x n*? Hľadanie odpovede na túto otázku vyvrcholilo súvislosťou so súčtom $1+2+3+\cdots+n$, čiže predstavuje pre žiakov ďalší, nečakaný spôsob odvodenia hodnoty tohto súčtu.

Hlavolam Tangram

Ide o štvorec rozdelený na 7 častí: 5 pravouhlých rovnoramenných trojuholníkov, dva najmenšie, stredný, dva najväčšie, štvorec a jeden kosodĺžnik (*obrázok 1*). Tangram predstavuje ideálne spojenie hry a učebnej pomôcky na rozvíjanie predstavivosti (Brincková, Uherčíková, Vankúš, 2013).

Obrázok 1: hlavolam Tangram

Pravidlá hry:

- V každom obrazci musí byť použitých všetkých 7 častí skladačky.
- Žiadne časti sa nesmú prekrývať.
- Rovnobežník môže byť použitý aj prevrátený (po položení na opačnú stranu).

S Tangramom sa dá pracovať dvoma spôsobmi:

- Poskladať jednotlivé časti do vopred daných obrysov.
- Vytvárať postavy ľudí, zvierat, známe predmety, veci, geometrické obrazce podľa vlastnej fantázie a výsledok si zaznačiť.

Teraz uvedieme niektoré konkrétne úlohy, ktoré účastníkom vzdelávania pri práci s Tangramom predkladáme:

Tvorivá úloha č. 1:

Zostav zo všetkých dielikov Tangramu obrazec podľa vlastnej fantázie (vlastných predstáv).

Tvorivá úloha č. 2:

Zostav podľa vlastnej predstavivosti útvar prikladaním jednotlivých dielikov Tangramu postupne k sebe zhodou stranou. Pomenuj ho.

Tvorivá úloha č. 3:

Zostav z dvoch Tangramov osovo súmerný útvar. Pomenuj ho.

Tvorivá úloha č. 4:

Z dvoch najväčších, stredného a dvoch najmenších trojuholníkov zostav dva obdĺžniky s rôznym obvodom. Majú rovnaký obsah?

Tvorivá úloha č. 5:

Aké geometrické útvary dokážeš zostaviť z jedného stredného a dvoch najmenších trojuholníkov?

Tvorivá úloha č. 6:

Dokáž pomocou dvoch Tangramov platnosť Pytagorovej vety.

Záver

V našom príspevku sme predstavili náplň pracovnej dielne s názvom *Hrové metódy vyučovania matematiky*. Konkrétne sme sa venovali dvom aktivitám, didaktickej hre s názvom *Zabudnutá hra* a práci s hlavolamom *Tangram*. Zabudnutá hra je aktívna činnosť žiakov rozvíjajúca ich logická a kombinatorické myslenie, s presahom do odvodenia vzťahu pre súčet prvých *n* prirodzených čísel. Predstavené úlohy s hlavolamom Tangram sú vhodné pre viaceré témy matematiky druhého stupňa ZŠ.

Grantová podpora

Príspevok vznikol v rámci grantu KEGA 014UK-4/2020 Podpora vzdelávania učiteľov matematiky na základných a stredných školách prostredníctvom zdieľania inovačných materiálov, foriem a metód vyučovania.

LITERATÚRA

[1] Brincková, J., Uherčíková, V., Vankúš, P.: *Netradičné metódy rozvíjania predstavivosti v matematike,* Bratislava, KEC FMFI UK Bratislava, 2013, ISBN 978-80-8147-019-6

[2] Petričková, A.: *Zabudnutá hra na hodine matematiky*, záverečná práca DPŠ, Bratislava, FMFI UK Bratislava, 2021

[3] Vankúš, P.: *Didaktické hry v matematike*, Bratislava, KEC FMFI UK Bratislava, 2012, ISBN 978-80-8147-002-8

doc. RNDr. Viera Uherčíková, CSc.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: v.uhercikova@gmail.com

PaedDr. Peter Vankúš, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: peter.vankus@fmph.uniba.sk

Dva dni s didaktikou matematiky 2021. Zborník príspevkov.

Editor:	Mária Slavíčková
Počet strán:	101
Vydala:	Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
	Univerzita Komenského v Bratislave
Miesto vydania:	Bratislava
Rok vydania:	2021

Táto publikácia neprešla jazykovou úpravou. Príspevky neboli recenzované. Za obsahovú náplň príspevkov a ich jazykovú stránku zodpovedajú autori.

ISBN 978-80-8147-108-7