

MATEMATICKÉ HRY A ANALÝZA ICH STRATÉGIE NA ÚROVNI STREDOŠKOLSKEJ MATEMATIKY

PETER VANKÚŠ

Abstract *In this article we discuss using of strategical mathematical games in teaching of mathematics at secondary school. We present one strategical mathematical game and describe process of mathematics lessons where was this game used. On this example we then illustrate methodology of using such games in mathematics education.*

ÚVOD

V našom článku prezentujeme výsledky výskumu zaoberajúceho sa používaním strategických matematických hier vo vyučovaní matematiky na strednej škole. Tento výskum sme realizovali i s pomocou výskumného štipendia udeleného v rámci projektu ESF CPP – Centrum projektovej podpory Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského financovaného z Európskeho sociálneho fondu.

Problematike didaktických hier vo vyučovaní matematiky sa autor v minulosti venoval vo viacerých publikáciách z mnohých pohľadov. Rozoberali sme efektívnosť vyučovania predmetu matematika metódou didaktických hier (Vankúš, 2005a; Vankúš, 2006a). Venovali sme sa tiež metodike používania didaktických hier vo vyučovaní matematiky na druhom stupni ZŠ (Vankúš, 2006b). Na základe analýzy historických materiálov sme študovali používanie hier vo vyučovaní matematiky (Vankúš, 2005b). V rámci prvého výskumného štipendia udeleného z už spomenutého projektu sme vytvorili zbierku didaktických hier určenú na hodiny matematiky druhého stupňa ZŠ (Vankúš, 2007a; <http://www.ddm.fmph.uniba.sk/ZH/>).

V tomto článku sa venujeme špeciálnemu druhu matematických hier, strategickým matematickým hrám. Uvádžeme konkrétnu ukážku strategickkej matematickej hry a metodiku jej používania vo vyučovaní. Táto metodika je aplikovateľná na všetky vhodné strategické matematické hry a je preto potenciálnym prínosom pre ich používanie vo vyučovaní matematiky na strednej škole.

STRATEGICKÉ MATEMATICKÉ HRY

Pod strategickou matematickou hrou rozumieme špeciálny typ didaktickej hry. Ozrejmime si tieto základné pojmy. Didaktická hra je vyučovacia metóda, ktorej významnou prednosťou je, že prináša žiakom potešenie z jej priebehu. Navyiac, tak ako každá vyučovacia metóda, vedie k dosiahnutiu stanovených edukačných cieľov na základe realizácie naplánovanej činnosti žiakov a učiteľa. Pedagogický slovník (Průcha, Walterová a Mareš, 1998, s. 48) podáva opisnú charakteristiku didaktickej hry:

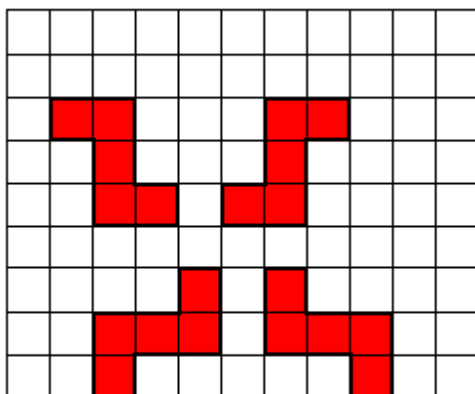
Didaktická hra: Analógia spontánnej činnosti detí, ktorá sleduje (pre žiakov nie vždy zjavným spôsobom) didaktické ciele. Môže sa odohrávať v učebni, v telocvični, na ihrisku, v prírode. Má svoje pravidlá, vyžaduje priebežné riadenie a záverečné vyhodnotenie. Je určená jednotlivcom aj skupinám žiakov, pričom rola pedagogického vedúceho má široké rozpätie od hlavného organizátora až po pozorovateľa. Jej prednosťou je stimulačný náboj, lebo prebúdzá záujem, zvyšuje angažovanosť žiakov na vykonávaných činnostiach, podnecuje ich tvorivosť, spontánnosť, spoluprácu aj súťaživosť, núti ich využívať rôzne poznatky a schopnosti, zapájať životné skúsenosti. Niektoré didaktické hry sa približujú modelovým situáciám z reálneho života.

VANKÚŠ, P. (2008): Matematické hry a analýza ich stratégie na úrovni stredoškolskej matematiky, In: 2. Zborník príspevkov štipendistov z projektu JPD 3 BA 2005/1-043 Centrum projektovej podpory FMFI UK, Knížničné a edičné centrum FMFI UK, Bratislava, ISBN 978-80-89186-26-6, s. 110-114

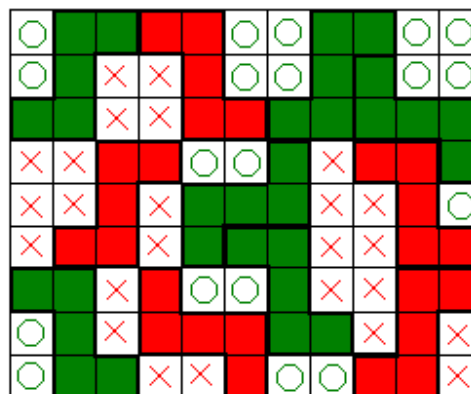
Pod strategickou matematickou hrou rozumieme potom didaktickú hru používanú v matematickej edukácii, pri ktorej kombinačné a najmä kauzálne úvahy umožňujú takú analýzu hry, z ktorej vyplýva pre niektorého z hráčov optimálna stratégia alebo aspoň návod na hru. Analýza stratégie hry môže byť vhodnou príležitosťou na rozvoj matematických zručností žiakov. Hypotézou prebiehajúceho výskumu je tvrdenie, že zaradenie analýzy stratégie vhodných hier do edukačného procesu na hodinách matematiky povedie k zlepšeniu schopnosti žiakov argumentovať a navyiac práca s takýmito hrami povedie k zlepšeniu postojev žiakov k matematike. Ako ukážku možného použitia strategicko-matematickej hry na hodine matematiky uvedieme teraz hru **Zet-ká** a opis priebehu hodín matematiky, na ktorých sa s ňou pracuje.

Hra Zet-ká je typickým príkladom strategicko-matematickej hry vhodnej na rozvoj strategického a logického myslenia žiakov. Táto hra je navyiac pre žiakov veľmi príťažlivá. Opíšme si priebeh hodiny, na ktorej žiakom túto hru predstavujeme. Ako prvý uvedieme názov hry. Nasleduje ústne vysvetlenie pravidiel hry doplnané ukážkami na tabuli. Po tomto ústnom podaní pravidiel hry ukážeme na tabuli ilustračný priebeh jednej hry, žiaci majú možnosť pýtať sa na prípadné nejasnosti ohľadne pravidiel. Uvedme si teraz pravidlá hry v písomnej podobe:

Hru hrajú dvaja hráči na štvorcovej hracej sieti s rozmermi 9 riadkov a 11 stĺpcov (tieto rozmery sa môže meniť). Hráč, ktorý je na ťahu, umiestni do voľných polí hracej plochy jedno zet-ko v ľubovolnej z jeho polôh (možné polohy zet-ka pozri na obrázku 1). Hráč, ktorý svojim zet-ko uzavrel oblasť, do ktorej sa už nedá ďalšie zet-ko umiestniť, označí voľné polia v tejto oblasti svojou značkou (napr. prvý hráč X, druhý hráč O). Hráči sa striedajú v ťahoch. Hra končí, keď nie je možné umiestniť ďalšie zet-ko. Vyhráva hráč, ktorý má v hracej ploche viac svojich značiek. Ilustračný príklad jednej hry pozri na obrázku 2.



Obrázok 1 Možné polohy zet-ka



Obrázok 2 Ilustračný príklad hry

Po vysvetlení pravidiel je možné precvičiť ich hrou dvojíc žiakov v laviciach. Žiaci sa striedajú v tom, kto z nich robí v hre prvý ťah. Pre zachovanie rovnosti podmienok je preto nutné odohrať vždy párny počet hier s tým istým protihráčom. Hráči si zapisujú vzájomné skóre, aby mali možnosť posúdiť svoju úspešnosť v hre. Nasledujúcou aktivitou môže byť potom žiakmi veľmi obľúbená súťaž tímov.

Pri súťaži tímov triedu rozdelíme na napr. štyri tímy s rovnakým počtom žiakov. (Ak to nie je možné a pri delení nám zvyšuje napr. jeden žiak, tak sa tento žiak spolu s iným žiakom z triedy budú striedať v tom, kto z nich hrá. Táto dvojica sa po istom čase mení za dvojicu iných žiakov.) V súťaži potom hrá tím proti inému tímu a to tak, že náhodne vybraný žiak z jedného tímu hrá proti náhodne vybranému žiakovi z druhého tímu. V praxi sa to dá realizovať pospájaním viacerých lavíc podľa počtu žiakov v tímoch. Následne si na jednu stranu sadne jeden

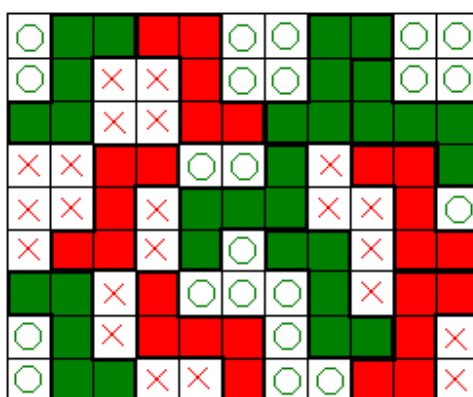
VANKÚŠ, P. (2008): Matematické hry a analýza ich stratégie na úrovni stredoškolskej matematiky, In: 2. Zborník príspevkov štipendistov z projektu JPD 3 BA 2005/1-043 Centrum projektovej podpory FMFI UK, Knížničné a edičné centrum FMFI UK, Bratislava, ISBN 978-80-89186-26-6, s. 110-114

tím, na opačnú stranu lavíc druhý tím. Protihráčmi sú žiaci sediaci oproti sebe. Odohrajú sa napr. dve hry (vždy párný počet, kvôli zachovaniu rovnosti podmienok, ako bolo spomenuté v predchádzajúcom odstavci). Po odohraní hier sú žiaci obodovaní nasledovne: Za víťazstvo (t.j. hráč vyhral v oboch odohraných hrách resp. v jednej vyhral a v druhej remizoval) prináša hráč svojmu tímu 2 body, remíza (obaja hráči vyhrali v jednej hre resp. remizovali v oboch hrách) prináša obom tímom po 1 bode, prehra (hráč prehral obe hry resp. jednu prehral a v druhej remizoval) prináša tímu daného hráča 0 bodov. Súčet získaných bodov všetkých hráčov tímu je skóre daného tímu po prvom kole. Následne sa vymenia tímy, ktoré hrajú proti sebe. Súťaž končí, keď každý tím hral proti všetkým ostatným tímom. Na základe získaného skóre sa určí poradie tímov v súťaži. Kvôli motivácii je dobré prácu žiakov ohodnotiť napr. bodmi za aktivitu. Víťazný tím získa 4 body, druhý tím 3 body, ďalší tím 2 body a posledný tím 1 bod. (Pre motiváciu je pozitívne, aby aj posledný tím získal nenulový počet bodov za aktivitu.) Uvedené vysvetľovanie pravidiel a následná súťaž tímov je aktivita na dve vyučovacie hodiny. Ideálne je realizovať ju na dvojhodinovke matematiky. Po tejto skúsenosti žiakov s hraním hry môžeme na nasledujúcej hodine prejsť k samotnej analýze stratégie hry Zet-ká.

V skutočnosti je výherná stratégia hry Zet-ká otvoreným problémom, bez známeho riešenia. Aj napriek tomu môžeme aj na úrovni strednej školy logickou úvahou zistiť pre ktorého hráča môže výherná stratégia existovať.

Aby sme mohli uskutočniť analýzu stratégie hry, musíme si so žiakmi ozrejmiť pojem výherná stratégia – t.j. algoritmus, použitím ktorého dokážeme zvíťaziť v hre za všetkých okolností bez ohľadu na súperove ťahy a jeho inteligenciu. Následne so žiakmi prediskutujeme, či výherná stratégia existuje pre každú hru. Odpoveď je, že v niektorých hrách výherná stratégia neexistuje. Ako príklad môžeme uviesť hru Piškvorky hranú na neohraničenom hernom poli. Ďalším veľmi dôležitým pojmom pre naše úvahy bude remizujúca stratégia a jej vzťah s výhernou stratégiou. Po krátkej diskusii žiaci sami prídu na vzájomný vzťah týchto pojmov: Ak napríklad prvý hráč v hre má remizujúcu stratégiu, znamená to, že nemôže existovať výherná stratégia pre druhého hráča, keďže prvý hráč dokáže vždy aspoň remizovať. O existencii výhernej stratégie pre prvého hráča nevieme v danom prípade nič povedať. Nasleduje otázka, či v hre Zet-ká je možná remíza.

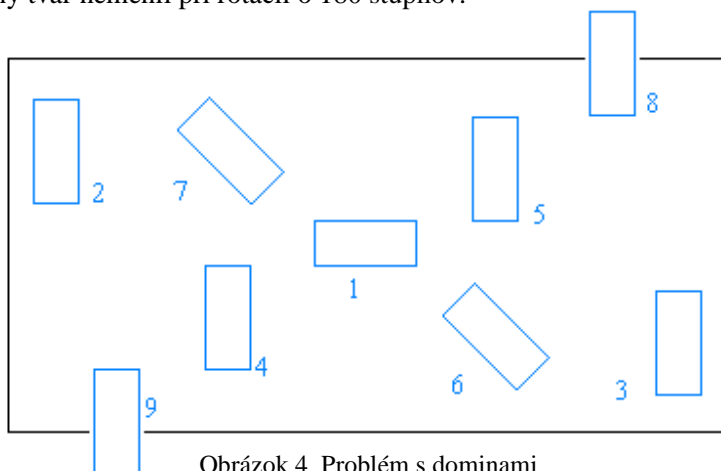
Na otázku ohľadne možnosti nastatia remízy v hre Zet-ká žiaci na základe skúsenosti z hrania tejto hry odpovedia kladne. Príklad hry, v ktorej nastala remíza, je na obrázku 3. Žiaci tu nevedomky využívajú existenčný dôkaz založený na konkrétnom príklade.



Obrázok 3 Remíza v hre Zet-ká

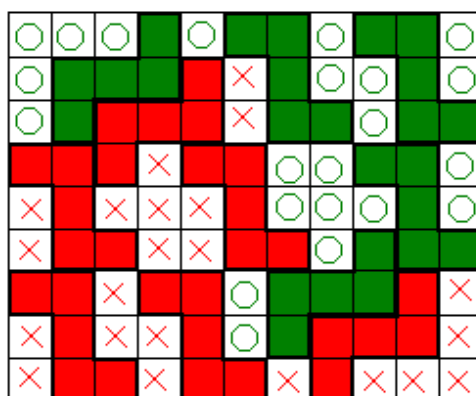
VANKÚŠ, P. (2008): Matematické hry a analýza ich stratégie na úrovni stredoškolskej matematiky, In: 2. Zborník príspevkov štipendistov z projektu JPD 3 BA 2005/1-043 Centrum projektovej podpory FMFI UK, Knížničné a edičné centrum FMFI UK, Bratislava, ISBN 978-80-89186-26-6, s. 110-114

Keďže v hre Zet-ká môže nastať remíza, namiesto je otázka, či existuje remizujúca stratégia a ak áno, pre ktorého hráča. Túto otázku dokážu žiaci vyriešiť na základe riešenia iného problému (Gardner, 1972): Dvaja hráči postupne kladú dominá na obdĺžnikový stôl, umiestňujú ich ľubovoľne. Potrebné je, aby domín bolo dostatočne veľa. Vyhráva ten, komu sa podarí položiť posledné domino. Nerozhodne sa hra nemôže skončiť, preto sa objavuje otázka. Kto zvíťazí, ak obidvaja účastníci hrajú dokonale logicky t.j. pre ktorého hráča existuje výherná stratégia? Riešenie tohto problému je založené na použití stredovej symetrie a na základe našich skúseností žiaci na neho dokážu prísť i samostatne. Výherná stratégia v tomto probléme existuje pre prvého hráča. Prvé domino je umiestnené v strede stola, následne prvý hráč kladie svoje dominá stredovo symetricky s dominami súpera, stredom symetrie je stred stola (pozri obrázok 4). Uvedená stratégia funguje aj v prípade, že by sme umiestňovali hracie dosky iných tvarov. Obmedzením je len to, aby sa daný tvar nemenil pri rotácii o 180 stupňov.



Obrázok 4 Problém s dominami

Použitie hore uvedenej stratégie v hre Zet-ká vedie k remíze. Našli sme teda remizujúcu stratégiu v hre Zet-ká pre prvého hráča. Príklad použitia tejto stratégie znázorňuje obrázok 5. Keďže vieme, že prvý hráč má remizujúcu stratégiu, vieme z toho vyvodit', že ak v hre Zet-ká existuje výherná stratégia, má ju prvý hráč. Uvedené úvahy fungujú samozrejme len pre rozmery hracej plochy hry Zet-ká pri ktorých existuje hracie pole, ktoré je stredom tejto hracej plochy. Rozmery, ktoré sme používali my (9 x 11), tieto podmienky spĺňajú.



Obrázok 5 Použitie remizujúcej stratégie v hre Zet-ká

VANKÚŠ, P. (2008): Matematické hry a analýza ich stratégie na úrovni stredoškolskej matematiky, In: 2. Zborník príspevkov štipendistov z projektu JPD 3 BA 2005/1-043 Centrum projektovej podpory FMFI UK, Knížničné a edičné centrum FMFI UK, Bratislava, ISBN 978-80-89186-26-6, s. 110-114

ZÁVER

V našom článku sme na konkrétnom príklade ilustrovali možnosti použitia analýzy stratégie matematických hier na úrovni strednej školy. Uvedená analýza je podľa našich skúseností príležitosťou na rozvoj argumentačných schopností a logického myslenia žiakov. Navyše používanie vhodných matematických hier zlepšuje i postoje žiakov k matematike (Vankúš, 2007b). Práca so strategickými matematickými hrami sa preto javí ako nádejná edukačná metóda vhodná na občasné spestrenie hodín matematiky. V našich ďalších výskumoch plánujeme podrobnejšie preskúmať a vyhodnotiť vplyvy používania strategických matematických hier v rámci vyučovania matematiky. Veríme, že naša práca povedie ku skvalitneniu vyučovania tohto dôležitého predmetu.

LITERATÚRA

- Burjan, V. , Burjanová, L. (1991): Matematické hry, Bratislava, Pythagoras.
- Průcha, J. , Walterová, E., Mareš, J. (1998): Pedagogický slovník, Praha, Portál.
- Gardner, M. (1972): Matematičeskije dosugi. Moskva, Mir.
- Vankúš, P. (2005a): 'Efficacy of teaching mathematics with method of didactical games in a didactic situation', In: *Quaderni di Ricerca in Didattica*, GRIM, University of Palermo, s. 90–105
- Vankúš, P. (2005b): 'History and Present of Didactical Games as a Method of Mathematics' teaching', In: *Acta Didactica Universitatis Comeniana, Mathematics, Issue 5*, Bratislava, Comenius University, s. 53–68.
- Vankúš, P. (2006a): *Efektívnosť vyučovania matematiky metódou didaktických hier*, Dizertačná práca, Comenius University, Bratislava.
- Vankúš, P. (2006b): 'Metodika práce s didaktickými hrami na hodinách matematiky II. stupňa ZŠ', In: *Fórum pedagogiky 2006: Transformácia vzdelávania smerom k potrebám európskeho trhu práce*, Bratislava, Metodicko-pedagogické centrum, s. 282–287.
- Vankúš, P. (2007a): 'Rozvoj matematických vedomostí žiakov prostredníctvom didaktických hier', In: Zborník príspevkov z projektu JPD 3 BA 2005/1-043 Centrum projektovej podpory, Bratislava, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK Bratislava.
- Vankúš, P. (2007b): Influence of didactical games on pupils' attitudes towards mathematics and process of its teaching, CERME 5, Cyprus, Larnaca (v tlači).

PETER VANKÚŠ, Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, 842 48 Bratislava

E-mail: peter.vankus@gmail.com

VANKÚŠ, P. (2008): Matematické hry a analýza ich stratégie na úrovni stredoškolskej matematiky, In: *2. Zborník príspevkov štipendistov z projektu JPD 3 BA 2005/1-043 Centrum projektovej podpory FMFI UK*, Knížničné a edičné centrum FMFI UK, Bratislava, ISBN 978-80-89186-26-6, s. 110-114